PARTIE III

n est un entier naturel non nul. L'espace $\mathbb{C}^n$ est muni de la norme $\| \ \|$ définie par :

$$\forall\, x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{C}^n \ , \ \|x\|=\sup\left\{|x_i|, 1\le i\le n\right\} .$$

Soit φ un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$. On dira que φ est borné lorsque pour tout vecteur x de $\mathbb{C}^n$, la suite $\left(\|\varphi^p(x)\|\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée, avec $\varphi^p=\varphi\circ\varphi\circ..\circ\varphi$ (p fois).

Id désigne l'application identique de $\mathbb{C}^n$.

III.1. **a)** Montrer que si φ est borné, toutes ses valeurs propres sont de module inférieur ou égal à 1.

b) Démontrer, à l'aide d'un endomorphisme simple de $\mathbb{C}^2$, que la réciproque de **a)** est fausse (on pourra raisonner avec les matrices).

c) On suppose φ diagonalisable. Montrer que la réciproque de **a)** est vraie.

III.2. Soit φ un endomorphisme borné de $\mathbb{C}^n$ et λ une valeur propre de φ, de module 1.
On considère un vecteur $x\in \mathrm{Ker}(\varphi-\lambda \mathrm{Id})^2$.
On pose $y=\varphi(x)-\lambda x$.

a) Exprimer $\varphi^p(x)$ sous forme d'une combinaison linéaire de x et y dont les coefficients seront donnés en fonction de p et λ.

b) En déduire que le vecteur x est un élément de $\mathrm{Ker}(\varphi-\lambda\mathrm{Id})$.

c) Démontrer que $\mathbb{C}^n=\mathrm{Ker}(\varphi-\lambda\mathrm{Id})\oplus\mathrm{Im}(\varphi-\lambda\mathrm{Id})$.

III.3. Soient p, q, r trois réels strictement positifs de somme 1.

On note $M=\begin{pmatrix} p & q & r\\ q & p & r\\ q & r & p\end{pmatrix}$ et φ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ de matrice M.

Démontrer que $\mathbb{C}^3=\mathrm{Ker}(\varphi-\mathrm{Id})\oplus\mathrm{Im}(\varphi-\mathrm{Id})$.