

# CCP PSI 2005 - Mathématiques 2

Durée : 4 heures  
calculatrices autorisées

## Notations et objectifs:

- $\mathbb{R}$  désigne l'ensemble des nombres réels,  $\mathbb{C}$  désigne l'ensemble des nombres complexes. Pour  $\lambda \in \mathbb{C}$ , on note  $|\lambda|$  le module de  $\lambda$ .
- $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  désigne l'espace des matrices à deux lignes et deux colonnes, à coefficients complexes.
- $M = (m_{i,j})$  étant une matrice à coefficients complexes, on note  $\overline{M} = (\overline{m_{i,j}})$  la matrice dont les coefficients sont les conjugués des coefficients de  $M$ . La matrice transposée de  $M$  est notée  ${}^tM$ .
- Pour  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ , on note  $\det(M)$  le déterminant de  $M$  et  $\text{tr}(M)$  la trace de  $M$ . On note  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Le problème porte sur l'étude des sous-ensembles de matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  et conduit à définir, par des matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ , des rotations d'un espace euclidien de dimension 3.

Dans la première partie, on définit un produit scalaire sur l'espace complexe  $\mathbb{C}^2$ .

Dans la deuxième et la troisième partie, on étudie des sous-ensembles de matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .

Dans la quatrième partie, on définit une structure euclidienne sur un sous-ensemble de matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  et on étudie des automorphismes de cet espace euclidien.

Dans tout le problème, des questions de calcul peuvent être traitées indépendamment des autres questions.

## Partie I

On note  $\mathbb{C}^2$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des couples de nombres complexes. Les deux vecteurs  $e_1 = (1, 0)$  et  $e_2 = (0, 1)$  de  $\mathbb{C}^2$  forment une base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$  de  $\mathbb{C}^2$  appelée base canonique.

Etant donné deux vecteurs  $x = (a, b)$ ,  $y = (c, d)$  de  $\mathbb{C}^2$ , de matrices  $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ,  $Y = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$  relativement à la base canonique, **on définit le produit scalaire**  $(x|y) = \overline{a}c + \overline{b}d = {}^t\overline{X}Y$ ; **la norme est définie par**  $\|x\| = \sqrt{(x|x)} = \sqrt{|a|^2 + |b|^2}$ .

$\mathbb{C}^2$  est un espace vectoriel préhilbertien complexe pour ce produit scalaire et  $\mathcal{B}$  est une base orthonormale de  $\mathbb{C}^2$ .

I.1 Soient  $x = (a, b)$ ,  $y = (c, d)$  deux vecteurs de  $\mathbb{C}^2$  et  $\lambda, \mu$  deux scalaires complexes. Exprimer les produits scalaires  $(y|x)$ ,  $(\lambda x|y)$ ,  $(x|\mu y)$  en fonction du produit scalaire  $(x|y)$ .

I.2 Soient  $x = (a, 1 + 3i)$ ,  $y = (-1 + 5i, 3 - 2i)$  deux vecteurs de  $\mathbb{C}^2$ .

I.2.1 A quelle condition sur le nombre complexe  $a$ , les vecteurs  $x$  et  $y$  forment-ils une base de  $\mathbb{C}^2$ ?

I.2.2 A quelle condition cette base est-elle orthogonale? Dans ce cas calculer la norme de  $x$ .

I.3 Soit  $T = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .

I.3.1 Déterminer les valeurs propres (complexes) et les sous-espaces propres de  $T$ .

I.3.2 En déduire qu'il existe une base orthonormale de vecteurs propres de  $T$ , que l'on explicitera.

I.4 Soit  $U = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . On note  $x = (a, b)$  et  $y = (c, d)$  les vecteurs colonnes de  $U$ . Exprimer le produit matriciel  ${}^t\bar{U}U$  en fonction de  $(x|y)$ ,  $\|x\|$  et  $\|y\|$ .

## Partie II

On note  $\mathcal{U} = \{U \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}); {}^t\bar{U}U = I_2\}$ .

II.1 Soit  $U = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  avec  $x = (a, b)$ ,  $y = (c, d)$ . A quelle condition sur les vecteurs colonnes  $x$  et  $y$  de  $U$  a-t-on  $U \in \mathcal{U}$ ?

II.2 Soit  $U \in \mathcal{U}$ . Calculer  $|\det(U)|$ , le module de  $\det(U)$ .

II.3 Soit  $U \in \mathcal{U}$ .

II.3.1 Montrer que  $U$  est inversible et que  $U^{-1}$  appartient à  $\mathcal{U}$ .

II.3.2 Montrer que  $\bar{U}$  appartient à  $\mathcal{U}$  et que  ${}^tU$  appartient à  $\mathcal{U}$ .

II.3.3 Soit  $V \in \mathcal{U}$ . Montrer que le produit  $UV$  appartient à  $\mathcal{U}$ .

II.4 Soit  $U$  un élément de  $\mathcal{U}$  et soit  $\lambda$  une valeur propre complexe de  $U$ . Déterminer  $|\lambda|$ .

## Partie III

On note  $\mathcal{SU} = \{U \in \mathcal{U}; \det(U) = 1\}$ .

Pour  $\theta$  élément de  $\mathbb{R}$ , on définit la matrice  $D_\theta \in \mathcal{SU}$  par:  $D_\theta = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$ .

II.1 Soit  $U = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .

III.1.1 Donner les quatre relations portant sur les scalaires  $a, b, c, d$  qui caractérisent l'appartenance de  $U$  à  $\mathcal{SU}$ .

III.1.2 On suppose que  $U$  appartient à  $\mathcal{SU}$ . Montrer que  $c = -\bar{b}$  et  $d = \bar{a}$ .

III.1.2 En déduire que  $U$  appartient à  $\mathcal{SU}$  si et seulement si  $U = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$  avec  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ .

II.2 Soit  $U = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$ , avec  $|a|^2 + |b|^2 = 1$  une matrice de  $\mathcal{SU}$ .

III.2.1 Déterminer le polynôme caractéristique  $\chi(\lambda) = \det(U - \lambda I_2)$  de  $U$ .  
En déduire qu'il existe un réel  $\theta$  tel que les valeurs propres de  $U$  sont  $e^{i\theta}$  et  $e^{-i\theta}$ .

Etant donnée une matrice  $U \in \mathcal{SU}$ , **on admet** que  $U$  est semblable à une matrice diagonale  $D_\theta$  avec une matrice de passage  $P \in \mathcal{SU}$ , c'est à dire qu'il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $P \in \mathcal{SU}$  tels que  $U = PD_\theta P^{-1}$ . La démonstration de ce résultat fera l'objet de la question **IV.7**.

III.2.2 Vérifier que la matrice  $T$  définie à la question I.3 appartient à  $\mathcal{SU}$ . Déterminer un réel  $\theta$  et une matrice  $P$  appartenant à  $\mathcal{SU}$ , tels que  $T = PD_\theta P^{-1}$ .

## Partie IV

Rappel:  $E$  étant un espace euclidien orienté de dimension 3, rapporté à une base orthonormale directe  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ ,  $\theta$  étant un réel, on note  $R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  la matrice relativement à cette base, de la rotation de  $E$  d'axe dirigé par le vecteur  $\epsilon_1$  et dont une mesure de l'angle est le réel  $\theta$ .

On note  $\mathcal{V} = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}); A = \bar{A}^t \text{ et } \text{tr}(A) = 0\}$ .

V.1 Soit  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{V}$ .

IV.1.1 Montrer que  $A$  est de la forme  $A = \begin{pmatrix} a & r + is \\ r - is & -a \end{pmatrix}$  avec  $a, r, s$  réels. En déduire que  $\mathcal{V}$  est un espace vectoriel réel dont une base est formée par les matrices  $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  
 $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ .

IV.1.2 Montrer que l'application définie sur  $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$  par:  $(A, B) \mapsto \langle A, B \rangle = \frac{1}{2} \text{tr}(AB)$  définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel réel  $\mathcal{V}$ . En notant  $\|A\| = \sqrt{\langle A, A \rangle}$  la norme de  $A$ , exprimer  $\|A\|^2$  en fonction de  $\det(A)$ .

IV.1.3 Pour  $j$  et  $k$  appartenant à l'ensemble  $\{1, 2, 3\}$ , calculer les produits scalaires  $\langle E_j, E_k \rangle$ . Que peut-on en déduire?

**Dans la suite on considère  $\mathcal{V}$  comme un espace euclidien, pour le produit scalaire défini ci-dessus. On oriente  $\mathcal{V}$  de sorte que la base  $(E_1, E_2, E_3)$  soit direct.**

V.2 Soit  $P \in \mathcal{SU}$ . On note  $\ell_P$  l'application définie sur  $\mathcal{V}$  par: pour tout  $A \in \mathcal{V}$ ,  $\ell_P(A) = PAP^{-1}$ .

IV.2.1 Montrer que  $\ell_P$  est un automorphisme orthogonal de l'espace euclidien  $\mathcal{V}$  (c'est à dire un endomorphisme de  $\mathcal{V}$  qui conserve la norme).

IV.2.2 Soient  $P$  et  $Q$  dans  $\mathcal{SU}$ . Montrer que le produit  $PQ$  appartient à  $\mathcal{SU}$  et montrer que la composée  $\ell_P \circ \ell_Q$  vérifie  $\ell_P \circ \ell_Q = \ell_{PQ}$ .

Dans la suite, pour  $U \in \mathcal{SU}$ , on étudie les automorphismes  $\ell_U$  de  $\mathcal{V}$ .

V.3 Caractérisation de  $\ell_{D_\theta}$ .

IV.3.1 Pour  $j = 1, 2, 3$ , exprimer  $\ell_{D_\theta}(E_j)$  dans la base  $(E_1, E_2, E_3)$ .

IV.3.2 En déduire que  $\ell_{D_\theta}$  est une rotation de l'espace euclidien  $\mathcal{V}$ , dont on donnera un vecteur qui dirige l'axe et une mesure de l'angle.

V.4 Soit  $U \in \mathcal{SU}$ . En utilisant un résultat admis dans **III.2**, déterminer une base orthonormale de l'espace euclidien  $\mathcal{V}$  relativement à laquelle la matrice de  $\ell_U$  est une matrice de rotation. Préciser un vecteur qui dirige l'axe et une mesure de l'angle de cette rotation.

V.5 Soit  $U = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathcal{SU}$ . En notant  $a = p+iq$ ,  $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ , on écrit  $U = pI_2 + iH$  avec  $H \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .

IV.5.1 Montrer que  $H$  appartient à  $\mathcal{V}$ .

IV.5.2 Déterminer  $\ell_U(H)$ .

IV.5.3 En notant  $b = r + is$ ,  $(r, s) \in \mathbb{R}^2$ , déterminer par ses composantes relativement à la base  $(E_1, E_2, E_3)$ , un vecteur de l'axe de la rotation  $\ell_U$ .

V.6 On considère la rotation  $\ell_T$  de  $\mathcal{V}$ , définie par la matrice de  $T$  de la question **I.3**; donner un vecteur qui dirige l'axe et une mesure de l'angle de cette rotation.

V.7 Soit  $U \in \mathcal{SU}$ . Démonstration du résultat admis dans **III.2**.

IV.7.1 On suppose que  $U$  a une valeur propre double; quelles sont les matrices  $U$  possibles?

IV.7.2 Dans le cas où  $U$  a deux valeurs propres distinctes, montrer que les sous-espaces propres correspondants sont orthogonaux dans  $\mathbb{C}^2$ . En déduire le résultat admis dans **III.2**.