Exercice (E3A 2006)

Rappel du critère spécial des séries alternées:
Soit$((-1)^n u_n)$ une suite telle que :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$
- (u_n) est une suite décroissante de limite nulle

alors:

- La série $\sum (-1)^n u_n$ converge
- La somme de la série est comprise entre deux sommes partielles consécutives.
- en particulier $\sum_0^{+\infty} (-1)^n u_n \geq u_0 - u_1 \geq 0$
- $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k \right| \leq |u_{n+1}|$

Dans ce problème les hypothèses i) et iii) assurent les hypothèses du critère spécial.
▲ : R_n est le reste d'ordre $n-1$.

1. En appliquant le critère spécial des séries alternées à partir du rang n on a que R_n est du signe de $(-1)^n$ donc

$$|R_n| = (-1)^n \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k u_k$$

et donc

$$\begin{aligned} |R_n| + |R_{n+1}| &= (-1)^n \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k u_k + (-1)^n \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k \\ &= (-1)^n \left(\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k u_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k \right) \\ &= (-1)^n \left((-1)^n u_n \right) = u_n \end{aligned}$$

$$\boxed{|R_n| + |R_{n+1}| = u_n}$$

2. Sur le même principe :

$$\begin{aligned} |R_n| - |R_{n+1}| &= (-1)^n \left(\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k \right) \\ &= (-1)^n \left(\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^{n+p} u_{n+p} + \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^{n+p+1} u_{n+p+1} \right) \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p u_{n+p} + \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^{p+1} u_{n+p+1} \end{aligned}$$

$$\boxed{|R_n| - |R_{n+1}| = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \left(u_{n+p} - u_{n+p+1} \right)}$$

La suite (u_n) est décroissante de limite nulle , donc la suite $p->(v_p = u_{n+p} - u_{n+p+1})$ est positive de limite nulle.
L'hypothèse iv) appliquée en $n+p \geq 0$ donne $v_{p+1} \geq v_p$. La suite (v_p) est donc décroissante.

Pour tout n , la suite (v_p) vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées. la série $\sum v_p$ converge (on le sait déjà) et elle est du signe du premier terme , donc positive
et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ |R_n| - |R_{n+1}| \geq 0$$

$$\boxed{\text{la suite } |R_n| \text{ est décroissante.}}$$

3. Par décroissance de la suite $|R_n|$ on a pour tout n

$$2\,|R_{n+1}| \leq |R_n| + |R_{n+1}| \leq 2\,|R_n|$$

ce qui avec la question 1 donne :

$$|R_{n+1}| \leq \frac{u_n}{2} \leq |R_n|$$

par translation d'indice $(n \in \mathbb{N}) \Rightarrow (n+1 \in \mathbb{N})$ on arrive au résultat voulu :

$$\boxed{\frac{u_n}{2} \leq R_n \leq \frac{u_{n-1}}{2}}$$

4. On a donc :

$$\frac{2R_n}{(-1)^n u_n} = \frac{2\,(-1)^n\,R_n}{u_n} = \frac{2\,|R_n|}{u_n} \in \left[1, \frac{u_{n-1}}{u_n}\right]$$

L'hypothèse ii) permet d'appliquer le théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2R_n}{(-1)^n u_n}\right) = 1$ et donc :

$$\boxed{R_n \sim \frac{(-1)^n u_n}{2}}$$

5. On va prendre $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n}$.

- i) $\forall n \geq 2$, $u_n > 0$
- ii) pour $n \geq 2$: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n}{n+1}\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \dfrac{n}{n+1}\left(1 + \dfrac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)}\right)$ tend bien vers 1
- iii)
  - par comparaison de $\ln(x)$ et x $\lim(u_n) = 0$
  - l'étude par dérivation des variations de $\phi(t) = \dfrac{\ln(t)}{t}$, montre que ϕ décroît sur $[e, +\infty[$
    La suite (u_n) décroît à partir du rang 3.
- iv) est équivalent à $\phi(n+2) - \phi(n+1) \geq \phi(n+1) - \phi(n)$ soit $\phi(n+1) \leq \dfrac{\phi(n) + \phi(n+2)}{2}$. Cette propriété est vérifiée si ϕ est convexe . (voir les rappels du problème avec $\lambda = \mu = 1/2, x = n, y = n+2$) Or ϕ est C^2 sur $[1, +\infty[$ et $\phi"(t) = \dfrac{2\ln(t) - 3}{t^3}$. Donc pour $t \geq \exp(3/2)$ ϕ est convexe.
  Comme $e^{3/2} \simeq 4,48$ l'inégalité $\phi(n+2) - \phi(n+1) \geq \phi(n+1) - \phi(n)$ est vérifiée pour $n \geq 5$.
  Les hypothèses ne sont vérifiées que à partir du rang 5.On peut appliquer le théorème à la suite $(U_n)_{n\geq 5}$, ce qui ne change pas la valeur de R_n pour $n \geq 5$.

$$\boxed{a_n \sim \frac{(-1)^n \ln(n)}{2n}}$$

remarque : i),ii),iii) sont classiques. Le tracé avec Maple de $\dfrac{\ln(x+2)}{x+2} - 2\dfrac{\ln(x+1)}{x+1} + \dfrac{\ln(x)}{x}$ montre que iv) est réalisé à partir du rang $n = 4$. Si Vous ne savez pas faire ce iv) (pas facile , mais c'est la dernière question) pour conclure vous devez admettre le résultat APCR instruit par l'expérience du iii).

ISFA 2006

(institut des sciences financières et d'assurance pour être actuaire)

A.a) : On vérifie par récurrence : , $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\left(\forall x \geq -1, \phi(x) = \phi(x+n) - \ln\left(\prod_{k=1}^{n}(x+k)\right)\right)$

- si $n = 1$: $\phi(x) = \phi(x+1) - \ln(x+1)$ est l'hypothèse du sujet
- On suppose $\phi(x) = \phi(x+n) - \ln\left(\prod_{k=1}^{n}(x+k)\right)$.

  Comme $x + n > -1$ on a $\phi(x+n+1) = \phi(x+n) + \ln(x+n+1)$

  Donc

$$\phi(x) = \phi(x+n+1) - \ln(x+n+1) - \ln\left(\prod_{k=1}^{n}(x+k)\right) = \phi(x) = \phi(x+n+1) - \ln\left(\prod_{k=1}^{n+1}(x+k)\right)$$

A.b) On a **pour** $x > 0$: $\ln(x) = \phi(x) - \phi(x-1) = \Delta_x(-1)$ et $\ln(x+1) = \phi(x+1) - \phi(x) = \Delta_x(1)$.
Comme ϕ est convexe et $h = 1 > 0$ on a $\Delta_x(-1) \leq \phi'_g(x) \leq \phi'_d(x) \leq \Delta_x(1)$ et donc

$$\boxed{\forall x > 0 \text{ , } \ln(x) \leq \phi'_g(x) \leq \phi'_d(x) \leq \ln(x+1)}$$

A.c) On a donc

$$0 \leq \phi'_d(x) - \phi'_g(x) \leq \ln(x+1) - \ln(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

D'où par encadrement :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\phi'_d(x) - \phi'_g(x)\right) = 0$$

A.d) En dérivant à droite et à gauche la relation du **A.a)** on a pour $n > 0$ et $x > -1$

$$\begin{aligned} \phi'_d(x) &= \phi'_d(x+n) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x+k} \\ \phi'_g(x) &= \phi'_g(x+n) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x+k} \end{aligned}$$

et donc pour tout $n > 0$ et tout $x > -1$ $\phi'_d(x+n) - \phi'_g(x+n) = \phi'_d(x) - \phi'_g(x)$. En passant à la limite $(n \to +\infty)$ on a , avec le résultat de **A.c)**

$$\forall x > -1, \phi_d(x) - \phi'_g(x) = 0$$

Les dérivées à gauche et à droites sont égales et donc ϕ est dérivable en $x > -1$.
B.1) Un développement limité donne (comme $\lim (1/n) = 0$)

$$u_n = x\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{x^2 - x}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On a donc $\lim\limits_{+\infty} \left(n^2 u_n\right) = \left|\dfrac{x^2-1}{2}\right|$ ce qui assure la convergence absolue de la série $\sum u_n$.
B.2) On a :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$$

et

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+x) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+x) - \ln(n!)$$

ce qui assure le résultat :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} u_k = \ln(n!) + x\ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \ln(x+k)}$$

dans S_n on a une somme d'un nombre finie de fonction C^2 , donc S_n est C^2 sur $]-1, +\infty[$ et $S"_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(x+k)^2}$. La dérivée seconde est positive donc S_n est convexe.
On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \text{ , } \forall (x, y) \in]-1, +\infty[^2, \forall \lambda \in [0, 1] \text{ , } S_n(\lambda x + (1-\lambda)\, y) \leq \lambda S_n(x) + (1-\lambda) S_n(y)$$

Or on peut passer à la limite dans une inégalité large donc

$$\forall (x, y) \in]-1, +\infty[^2, \forall \lambda \in [0, 1] \text{ , } S(\lambda x + (1-\lambda)\, y) \leq \lambda S(x) + (1-\lambda) S(y)$$

et donc

$$\boxed{S \text{ est convexe sur }]-1, +\infty[}$$

B.3) Pour $x > -1$ on a :

$$\begin{aligned} S_n(x+1) &= \ln(n!) + (x+1)\ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \ln(x+1+k) \\ &= \ln(n!) + (x+1)\ln(n+1) - \sum_{k=2}^{n+1} \ln(x+k) \end{aligned}$$

On a donc
$$S_n(x+1) - S_n(x) = \ln(n+1) - \ln(x+n+1) + \ln(x+1) = \ln\left(\frac{n+1}{n+x+1}\right) + \ln(x+1)$$
On fait tendre n vers $+\infty$:
$$S(x+1) - S(x) = \ln(x+1)$$
S est définie convexe sur $]-1,+\infty[$ et vérifie $\forall x > -1$, $S(x+1) - S(x) = \ln(x+1)$ donc :
$$\boxed{S \in F}$$

B.4) On a d'après **A.a)** puis **B.2)**
$$S(x+n) = S(x) + \sum_{k=1}^{n} \ln(x+k) = S(x) + \ln(n!) + x\ln(n+1) - S_n(x)$$
et donc
$$S(x+n) - (\ln(n!) + x\ln(n+1)) = S(x) - S_n(x)$$
La limite de la somme partielle est la somme de la série et donc
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} (S(x+n) - (\ln(n!) + x\ln(n+1))) = 0}$$

B.5) Sur la même idée si $f(x+1) = f(x) + \ln(x+1)$ on a :
$$\begin{aligned} f(x+n) &= f(x) + \sum_{k=1}^{n} \ln(x+k) \\ &= f(x) + \ln(n!) + x\ln(n+1) - S_n(x) \end{aligned}$$
et donc
$$f(x) - S_n(x) = f(x+n) - \ln(n!) - x\ln(n+1)$$
En faisant tendre n vers $+\infty$, la seconde hypothèse assure que
$$\boxed{f(x) = S(x)}$$

B.6) Les fonctions S et f sont dans F donc sont dérivables sur $]-1,+\infty[$ d'après la partie A

- pour tout $x > -1$:
$$d(x+1) = f(x+1) - S(x+1) = (f(x) + \ln(1+x)) - (S(x) + \ln(1+x)) = f(x) - S(x) = d(x)$$
$$\boxed{d \text{ est 1-périodique}}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.
  f est convexe donc d'après le point iv) des rappels, f' est croissante :
$$x \in [n, n+1] \Rightarrow f'(n) \le f'(x) \le f'(n+1)$$
  mais d'après l'équation caractéristique de F : $f'(n+1) = f'(n) + \dfrac{1}{n+1}$ d'où l'encadrement.
$$x \in [n, n+1] \Rightarrow f'(n) \le f'(x) \le f'(n) + \frac{1}{n+1}$$
  de même pour S.

- On multiplie la seconde inégalité par -1 (en la changeant de sens) et on ajoute :
$$\boxed{x \in [n, n+1] \Rightarrow d'(n) - \frac{1}{n+1} \le d'(x) \le d'(n) + \frac{1}{n+1}}$$

- On utilise deux fois la période 1:
  - $n \in N$ donc $d'(n) = d'(0)$

– $\forall y \in [0,1]$, $x = y + n \in [n, n+1]$.
– ce qui donne

$$y \in [0,1] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \text{ , } d'(0) - \frac{1}{n+1} \leq d'(y) \leq d'(0) + \frac{1}{n+1}$$

y est indépendant de n , donc en passant à la limite :$\forall y \in [0,1]$, $d'(y) = d'(0)$
La dérivée est constante sur $[0,1]$, donc il existe deux réels a et b tels que $d(y) = ay + b$ sur $[0,1]$.
Mais $d(0) = f(0) - S(0) = 0 - \sum 0 = 0$ et (par période) $d(1) = d(0) = 0$ et donc $a = b = 0$

- $d = \widetilde{0}$ sur $[0,1]$, donc par période sur $]-1, +\infty[$

$$\boxed{S = f}$$

remarque : en adaptant un tout petit la fin on a

$$g \in F \Longleftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} \text{ , } g = S + a$$