PC2 DM 2 pour le 16 Octob

Exercice 1.

Soit $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n u_n$ une série alternée avec :

- **i)** $\forall\, n \in \mathbf{N},\ u_n > 0,$
- **ii)** $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1,$
- **iii)** la suite (u_n) converge en décroissant vers 0,
- **iv)** $\forall\, n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} - u_{n+1} \geqslant u_{n+1} - u_n.$

Soit $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k u_k.$

1. Vérifier que : $\forall\, n \in \mathbf{N},\ |R_n| + |R_{n+1}| = u_n.$

2. Vérifier que : $\forall\, n \in \mathbf{N},\ |R_n| - |R_{n+1}| = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \left[u_{n+p} - u_{n+1+p}\right].$

En déduire la monotonie de la suite $\left(\,|R_n|\,\right)_{n\geqslant 0}.$

3. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbf{N},\ \frac{u_n}{2} \leqslant |R_n| \leqslant \frac{u_{n-1}}{2}.$

4. En déduire qu'au voisinage de l'infini : $R_n \underset{+\infty}{\sim} (-1)^n \frac{u_n}{2}.$

5. *Application* :

Déterminer un équivalent au voisinage de l'infini de : $a_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k}.$

PROBLÈME III

Rappels :

(i) - Une fonction f est dite convexe sur un intervalle ouvert I si pour tout couple (x,y) d'éléments de I on a :

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y). \quad \text{Pour tout } \lambda \in [0,1].$$

(ii) – Une fonction convexe sur I est continue sur I et admet une dérivée à droite et à gauche en tout point.

(iii) – Une fonction convexe possède en tout point x de I la propriété suivante :

- Sur son domaine de définition :

$$\text{la fonction } h \to \Delta_x(h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ est croissante}$$

- Pour h>0 :

$$\Delta_x(-h) \leq \lim_{h\to 0;\,h>0} \Delta_x(-h) (\text{notée } f_g'(x)) \leq \lim_{h\to 0;\,h>0} \Delta_x(h)\ (\text{notée } f_d'(x)) \leq \Delta_x(h)$$

(iv) – Si une fonction convexe est dérivable sa dérivée est croissante.

(v) - Si f est dérivable deux fois et si sa dérivée seconde est positive alors f est convexe.

A

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions ϕ définies sur $I =]-1\,,\,+\infty[$, convexes et telles que pour tout x de I :

$$\phi(x+1) = \phi(x) + ln(x+1)\ .$$

a. Montrer l'égalité $\phi(x) = \phi(x+n) - ln[(x+1)...(x+n)]$ pour n entier strictement positif.

b. Montrer en utilisant le rappel (ii) ci-dessus que pour x>0: iii pas ii

$$ln(x) = \phi(x) - \phi(x-1) \leq \phi'_g(x) \leq \phi'_d(x) \leq \phi(x+1) - \phi(x) = ln(x+1)\ .$$

c. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\phi'_d(x) - \phi'_g(x)\right] = 0$.

d. Déduire de b et c que la fonction ϕ est dérivable sur $]-1,\,+\infty[$.

B

Soit la suite de fonctions définies sur $]-1,+\infty[$ par :

$$u_n(x) = x\,ln\left[1+\frac{1}{n}\right] - ln\left[1+\frac{x}{n}\right];\ n\ entier\ strictement\ positif\ .$$

1. Montrer que la série de terme général $u_n(x)$ est convergente.

   On note $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ la suite des sommes partielles et $S(x)$ la somme de la série.

2. Montrer que l'on peut écrire $S_n(x)$ sous la forme :

   $$S_n(x) = ln(n!) + x\,ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} ln(x+k)$$

   En déduire que les fonctions $x \to S_n(x)$ sont convexes puis que la fonction S est aussi convexe.

3. Montrer que la fonction S est un élément de $\mathcal{F}$.
4. Montrer que pour tout x de I la suite $n \to S(x+n) - x\,ln(n+1) - ln(n!)$ a pour limite 0 .
5. Réciproque I :

   Soit f une fonction définie sur $]-1,\,+\infty[$ telle que :

   $$\begin{cases} f(x+1) = f(x) + ln(x+1) \\ \lim\limits_{n\to\infty} f(x+n) - x\,ln(n+1) - ln(n!) = 0 \end{cases}$$

   Montrer que f est égale à S

   Indication : On pourra exprimer f(x+n) en fonction de f(x)

6. Réciproque II :

   Soit f une fonction définie sur $]-1,+\infty[$ telle que :

   $$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x+1) = f(x) + ln(x+1) \\ f\ est\ convexe \end{cases}$$

   Montrer que f est égale à S.

<u>*Indications :*</u>

On pourra introduire la fonction d définie par d(x)=f(x)-S(x) et montrer successivement que :

(i) *d est une fonction 1- périodique*

(ii) *Pour : $n \leq x \leq n+1$*

$$f'(n) \leq f'(x) \leq f'(n+1) = f'(n) + \frac{1}{n+1}$$

$$S'(n) \leq S'(x) \leq S'(n+1) = S'(n) + \frac{1}{n+1}$$

(iii) $d'(n) - \frac{1}{n+1} \leq d'(x) \leq d'(n) + \frac{1}{n+1}$

(v) *d est identiquement nulle.*