EPITA 2008 - mathématiques 2

(durée de l'épreuve : 2 heures)

On considère dans ce problème un entier $p \geq 2$ et un polynôme à coefficients réels de degré p et de coefficient dominant $a_p = 1$:

$$P(X) = \sum_{k=0}^{p} a_k\, X^k = X^p + a_{p-1}\, X^{p-1} + \ \dots\ + a_1\, X + a_0.$$

1°) *Evaluation du polynôme P en un réel x*

On introduit les polynômes $Q_0, Q_1, \ \dots, Q_p$ définis par $Q_0(X) = 1$ et pour $1 \leq n \leq p$ par :

$$Q_n(X) = X\, Q_{n-1}(X) + a_{p-n}.$$

a) Calculer $Q_1(X)$, $Q_2(X)$ et déterminer par récurrence l'expression de $Q_n(X)$ pour $n \leq p$.
Vérifier que $Q_n(X)$ est le quotient de la division euclidienne de $P(X)$ par X^{p-n}.

b) Préciser la valeur de $Q_p(x)$ pour tout nombre réel x.
Ecrire un algorithme permettant d'obtenir $P(x)$ par la méthode précédente.
Combien cet algorithme nécessite-t-il d'opérations + et × ?

2°) *Recherche d'une racine réelle x du polynôme P*

On considère deux nombres réels a et b ($a < b$) tels que $P(a)\, P(b) \leq 0$.

On définit deux suites (a_n) et (b_n) par $a_0 = a$, $b_0 = b$, puis par :

- $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{1}{2}\,(a_n + b_n)$ si $P(a_n)\, P\!\left(\frac{1}{2}\,(a_n + b_n)\right) \leq 0$.
- $a_{n+1} = \frac{1}{2}\,(a_n + b_n)$ et $b_{n+1} = b_n$ si $P(a_n)\, P\!\left(\frac{1}{2}\,(a_n + b_n)\right) > 0$.

a) Etablir que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

b) Etablir, pour tout entier naturel n, qu'on a $P(a_n)\, P(b_n) \leq 0$.
En déduire que la limite commune x des suites (a_n) et (b_n) est racine de P.

c) Ecrire un algorithme permettant d'obtenir un encadrement de x d'amplitude $h \leq \frac{b-a}{2^n}$.
Combien cet algorithme nécessite-t-il d'opérations + et × ?

On se propose maintenant de localiser dans le plan complexe les racines du polynôme P, afin de savoir dans quelle zone rechercher d'éventuelles racines de ce polynôme P.

On désigne à cet effet par $M = M(P)$ le nombre réel positif suivant :

$$M = \max_{0 \leq k \leq p-1} (|a_k|) = \max(|a_{p-1}|, \ \dots, |a_1|, |a_0|).$$

3°) *Etude d'une fonction auxiliaire f*

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(r) = r^{p+1} - (M+1)\, r^p + M.$$

a) Déterminer l'unique zéro strictement positif r_0 de sa dérivée.
Comparer les positions de r_0 et 1 en fonction des positions de M et $\frac{1}{p}$.

b) On suppose $M \leq \frac{1}{p}$. Dresser un tableau de variation de f pour $r \geq 0$.

En déduire le signe de $f(r)$ pour $r > 1$.

c) On suppose $M > \frac{1}{p}$. Dresser un tableau de variation de f pour $r \geq 0$.

En déduire le signe de $f(r)$ pour $r \geq M + 1$.

4°) *Localisation des racines du polynôme P*

a) Démontrer que toute racine réelle ou complexe $z \neq 1$ du polynôme P vérifie l'inégalité :

$$|z|^p \leq M \frac{|z|^p - 1}{|z| - 1}.$$

En supposant $|z| > 1$, montrer qu'on a l'inégalité $f(|z|) = |z|^{p+1} - (M+1)\,|z|^p + M \leq 0$.

b) Etablir, si $M \leq \frac{1}{p}$, que les racines de P sont de module inférieur ou égal à 1.

c) Etablir, si $M > \frac{1}{p}$, que les racines de P sont de module strictement inférieur à $M + 1$.

5°) *Etude de deux exemples*

5.1. On suppose dans cette sous-question que P est le polynôme défini comme suit :

$$P(X) = X^p - \frac{1}{p}\,(X^{p-1} + \ ... \ + X + 1) = X^p - \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} X^k.$$

- Montrer que ses racines réelles ou complexes sont de module inférieur ou égal à 1.
- Montrer que 1 est une racine simple de P. Qu'en déduit-on par rapport à 4°b ?

5.2. On suppose dans cette sous-question que P est le polynôme défini comme suit :

$$P(X) = X^p - (X^{p-1} + \ ... \ + X + 1) = X^p - \sum_{k=0}^{p-1} X^k.$$

a) Montrer que ses racines réelles ou complexes sont de module strictement inférieur à 2.

b) Etablir, si z est racine de P, que z est racine du polynôme $X^{p+1} - 2\,X^p + 1$.

c) En étudiant pour $r \geq 0$ la fonction définie par $g(r) = r^{p+1} - 2\,r^p + 1$, établir que :

- le polynôme P a une racine réelle x_p telle que : $\frac{2\,p}{p+1} \leq x_p \leq 2$.
- la suite $p \longrightarrow x_p$ converge vers 2. Qu'en déduit-on par rapport à 4°c ?

d) On pose maintenant $x_p = 2 - \varepsilon_p$ et on étudie ε_p lorsque p tend vers $+\infty$.

- Etablir que x_p vérifie la relation $(2 - x_p)\,x_p^p = 1$, puis que $\varepsilon_p = (2 - \varepsilon_p)^{-p}$.
  En déduire que la suite $p \longrightarrow p\,\varepsilon_p$ converge vers 0.
- Etablir qu'on a le développement asymptotique suivant lorsque p tend vers $+\infty$:

$$x_p = 2 - \frac{1}{2^p} + o\Big(\frac{1}{2^p}\Big).$$

e) Etablir enfin que z est racine de P si et seulement si $z' = 1/z$ est racine de :

$$Q(X) = X^p + X^{p-1} + \ ... \ + X - 1 = \sum_{k=1}^{p} X^k - 1.$$

En déduire que toutes les racines de P sont de module compris entre $\frac{1}{2}$ et 2.

***