extrait de l'épreuve de Mathématiques II, TSI, concours CCP 2006

PARTIE 1

1)a)

$$\begin{aligned} x-\quad > \quad x^{\alpha} \text{ est solution de}(E_H) \; &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ x^{\alpha}(\alpha(\alpha-1)-\alpha+1)=0 \\ \Leftrightarrow \quad (\alpha-1)^2 = 0 &\Leftrightarrow \alpha = 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc une solution de } (E_H) \text{ est la fonction } Id_{\mathbb{R}^{+*}}}$$

b)On utilise la méthode de variation de la constante pour finir de résoudre l'équation homogène. Sur $\mathbb{R}^{+*}$ ni le coefficient de y" , ni la solution particulière n'ont de racine ; le calcul est donc possible :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^{+*},\quad x^2(xK''(x)+2K'(x)) - x(xK'(x)+K(x)) + xK(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow xK''(x)+K'(x)=0 \\ &\Leftrightarrow (xK'(x))' = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ xK'(x) = \lambda \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda,\ \mu \in \mathbb{R},\ K(x) = \lambda \ln x + \mu \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda,\ \mu \in \mathbb{R},\ y(x) = \lambda x \ln x + \mu x \end{aligned}$$

Sur $\mathbb{R}^{+*}$ les coefficients de l'équation différentielle linéaire du second ordre sont des fonctions continues , et le coefficient de y" n'a pas de racine, l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2.
Les deux fonctions $x->x$ et $x->x\ln(x)$ sont libres (le log n'est pas constant) et forment donc un système fondamental de solutions.

$$\boxed{x^2y" - xy' + y = 0 \Longleftrightarrow \exists\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}^{+*}\ ,\ y(x) = \lambda x \ln(x) + \mu x}$$

2)a) $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ x^2y_0''(x) - xy_0'(x) + y_0(x) = x^2.\dfrac{1}{x^2} - x.\dfrac{-1}{x} - 1 - \ln x = 1 - \ln x.$ Donc :

$$\boxed{y_0 \text{ est solution particulière de } (E)}$$

b) Toute solution de l'équation avec second membre est somme de la solution particulière et d'une solution de l'équation homogène.

$$\boxed{x^2y" - xy' + y = 1-\ln(x) \Longleftrightarrow \exists\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}^{+*}\ ,\ y(x) = -1-\ln(x) + \lambda x \ln(x) + \mu x}$$

3) $y(1) = 0$ impose $\mu = 1$, puis comme $y'(x) = -\dfrac{1}{x} + \lambda \ln(x) + \lambda + \mu$ on a $\mu = 0$. L'unique solution de l'équation vérifiant $y(1) = y'(1) = 0$ est la fonction f de la seconde partie .

Partie II

1)a) f est C^{∞} sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$. Cela donne le tableau de variations de f suivant :

x	0			1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$		0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

b) Le tableau de variations de f montre que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f(x) \geq 0$, d'où :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln x \leq x - 1}$$

c) (Oy) est asymptote à la courbe puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.
$f(x) \underset{+\infty}{\sim} x$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) - x = -\infty$.
Donc le graphe de f admet une branche parabolique de direction asymptotique d'équation $y = x$ quand x tend vers $+\infty$.
On en déduit l'allure du graphe de f :

2 a)

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int (x-1-\ln x)\,dx \\ &= \frac{x^2}{2} - x - x\ln x + x + k \text{ où } k\in\mathbb{R} \\ &= \frac{x^2}{2} - x\ln x + k \text{ où } k\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

b) En particulier pour $x > 0$:

$$\int_x^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} + x\ln x$$

On fait tendre x vers 0 . La quantité précédente tend alors vers une limite finie : $1/2$. Donc :

$$\boxed{\int_0^1 f(x)\,dx \text{ converge et } \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}}$$

c) Par contre .

$$\int_1^x f(x)\,dx = -\frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} - x\ln x$$

admet une limite infinie si x tend vers $+\infty$
Donc :

$$\boxed{\int_0^1 f(x)\,dx \text{ diverge.}}$$

Partie III

1)a) D'après II)1)b), $\forall i\in\{1,\cdots,n\}$, $\ln\frac{a_i}{m_a} \leq \frac{a_i}{m_a} - 1$. En ajoutant membre à membre ces inégalités, on obtient :

$$\sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{a_i}{m_a}\right) \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{m_a} - 1\right)$$

Soit

$$\ln\left(\frac{\prod_{i=1}^n a_i}{m_a^n}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{m_a} - n$$

Or $m_a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i$ et donc $\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{m_a} - n = 0$. On a donc $\ln\left(\frac{\prod_{i=1}^n a_i}{m_a^n}\right) \leq 0$ soit en composant par exp croissante :

$$\frac{\prod_{i=1}^n a_i}{m_a^n} \leq 1$$

Ce qui donne bien : $\boxed{m_g \leq m_a}$.

b) Pour que $m_g = m_a$, il faut et il suffit que

$$\sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{a_i}{m_a}\right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{m_a} - 1\right)$$

Or une somme d'inégalités de même sens est une égalité si et seulement si toutes les inégalités sont des égalités. et donc

$$\forall i\in\{1,\cdots,n\}\ ,\ \ln\frac{a_i}{m_a} = \frac{a_i}{m_a} - 1$$

L'étude de f montre que $f(x)=0$ admet une seule racine 1 .

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \ \frac{a_i}{m_a} = 1$$

c'est-à-dire que les a_i sont tous égaux . (et si les a_i sont tous égaux on a bien $a_i = m_a$)

$$\boxed{m_g = m_a \Leftrightarrow a_1 = \cdots = a_n}$$

c) Si $x=0$ ou $y=0$ ou $z=0$, l'inégalité proposée est trivialement vraie.
Sinon, on pose $a = x^4y^2z^2, \ b = x^2y^4z^2, \ c = x^2y^2z^4$ et $d=1$. Alors $a,b,c,d>0$ et d'après la question précédente :

$$\sqrt[4]{abcd} \leq \frac{a+b+c+d}{4}$$

soit

$$\sqrt[4]{x^8y^8z^8} \leq \frac{x^4y^2z^2 + x^2y^4z^2 + x^2y^2z^4 + 1}{4}$$

Comme les quantités sont positives $\sqrt[4]{x^8y^8z^8} = \left|x^2y^2z^2\right| = x^2y^2z^2$

$$\boxed{\forall (x,y,z) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^3, \ x^4y^2z^2 + x^2y^4z^2 + x^2y^2z^4 - 4x^2y^2z^2 + 1 \geq 0}$$

0.1. 2)a)

D'après III)1)a) appliqué aux $\dfrac{1}{a_i}$ on a :

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdots \frac{1}{a_n}} \leq \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)$$

ce qui équivaut à : :

$$\boxed{m_h \leq m_g}$$

b) D'après III)1)b), $m_h = m_g$ si et seulement si les $\dfrac{1}{a_i}$sont tous égaux : D'où :

$$\boxed{m_h = m_g \Leftrightarrow a_1 = \cdots = a_n}$$

c) Comme $m_h \leq m_g$ et $m_g \leq m_a$, $m_h \leq m_a$.
On remplace les a_i par les x_i : $m_a = \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$ et $m_h = \dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}}$. On alors : $m_h \leq m_a$, d'où :

$\dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}} \leq \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$, ce qui montre :

$$\boxed{(x_1 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2}$$

Partie IV)

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La moyenne géométrique de $1, \cdots, n$ est $m_g = \sqrt[n]{n!}$. La moyenne arithmétique de $1, \cdots, n$ est $m_a = \dfrac{n(n+1)}{2n} = \dfrac{n+1}{2}$.
D'où :

$$\boxed{\sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2}}$$

2) Classique comparaison d'une série et d'une intégrale.
a) $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2, \forall t \in [k-1,k], \ \dfrac{1}{k} \leq \dfrac{1}{t} \Rightarrow \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{k}\ dt \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\ dt$. D'où :

$$\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\ dt$$

b) En sommant ces inégalités membre à membre pour k variant de 2 à n ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$), on obtient :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_{1}^{n} \frac{1}{t}\, dt$$

et en ajoutant 1 aux deux membres :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \int_{1}^{n} \frac{1}{t}\, dt.$$

Cette inégalité étant encore vraie pour $n = 1$, on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \int_{1}^{n} \frac{1}{t}\, dt}$$

c) L'inégalité précédente montre que pour $n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n$. D'où :

$\displaystyle\frac{n}{1 + \ln n} \leq \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$ .Or ce dernier nombre est la moyenne harmonique m_h de $1, \cdots, n$

Comme la moyenne harmonique est inférieure à la moyenne géométrique,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{n}{1 + \ln n} \leq \sqrt[n]{n!}}$$

3)a) $\displaystyle\frac{n}{1 + \ln n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n}{\ln n}$ qui tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. De la question précédente, on déduit :

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

La suite du problème :

- Montre que la suite $\left(\sqrt[n]{n!}\right)$ est croissante et donc que la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$ converge
- Montre que $\sqrt[n]{n!} \sim_{+\infty} \dfrac{n}{e}$ et donc que la série $\displaystyle\sum \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ diverge alors que $\displaystyle\sum \frac{1}{(n!)^{2/n}}$ converge