D'APRES L'EPREUVE SPECIFIQUE 2006 - CCP - FILIERE TSI Math 2

Les calculatrices sont interdites

N.B. : Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Partie I) Une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $x^2y'' - xy' + y = 1 - \ln(x)$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1) a) Déterminer une solution de l'équation homogène associée de la forme $x \to x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$.

b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.

2) a) Vérifier que la fonction y_0 définie par $y_0(x) = -1 - \ln(x)$ est une solution particulière de l'équation (E_2).

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

3)Déterminer l'unique solution de l'équation (E) telle que $f(1) = 0,\ f'(1) = 0$.

Partie II) Étude d'une fonction

1) f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = x - 1 - \ln(x)$.

a) Étudier les variations de la fonction f.

b) Déduire de l'étude des variations de f que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) \leq x - 1$.

c) Étudier les branches infinies de f et construire une allure de la représentation graphique.

2) a) Déterminer une primitive de la fonction f.

b) Démontrer que l'intégrale $\int_0^1 f(x)\ dx$ converge et la calculer.

c) Quelle est la nature de l'intégrale : $\int_1^{+\infty} f(x)\ dx$?

Partie III) Comparaison des moyennes.

Soient $a_1,\ a_2, \cdots,\ a_n$ n nombres réels strictement positifs.

On appelle moyenne arithmétique de ces nombres le nombre réel m_a défini par : $m_a = \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$.

On appelle moyenne géométrique le nombre réel m_g défini par : $m_g = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$.

On appelle moyenne harmonique le nombre réel m_h défini par : $m_h = \dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}}$.

1) a) En appliquant l'inégalité montrée à la question II) 1) b) aux réels $\dfrac{a_i}{m_a}$, montrer que $m_g \leq m_a$.

b) Dans quel cas a-t-on $m_g = m_a$?

c) Démontrer que pour tout triplet (x, y, z) de réels, on a :

$$x^4y^2z^2 + x^2y^4z^2 + x^2y^2z^4 - 4x^2y^2z^2 + 1 \geq 0.$$

2) a) En appliquant l'inégalité vue en III) 1) a) aux réels $\dfrac{1}{a_1},\ \dfrac{1}{a_2}, \cdots,\ \dfrac{1}{a_n}$, montrer que $m_h \leq m_g$?

b) Dans quels cas a-t-on $m_h = m_g$?

c) Montrer que, pour tous nombres réels strictement positifs $x_1, \cdots, x_n$, on a :

$$(x_1 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2.$$

Partie IV) Application.

1) Déduire de l'inégalité $m_g \leq m_a$: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sqrt[n]{n!} \leq \dfrac{n+1}{2}$.

2) a) Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, $\dfrac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \dfrac{dx}{x}$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \leq 1 + \int_1^n \dfrac{dx}{x}$.

c) En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $\dfrac{n}{1+\ln(n)} \leq \sqrt[n]{n!}$.

3) En déduire la limite de $\sqrt[n]{n!}$ quand n tend vers l'infini.