Le sujet reprend les parties 2 à 5 du sujet de CAPES 2007.

La partie 1 demandait une étude de la suite (s_n) avec comme règle de n'utiliser que des outils de terminale S

La partie 6 est une étude de la fonction définie par $Li(x) = \displaystyle\int_0^x -\frac{\ln(1-t)}{t}dt$

Remarque : presque toutes les égalités sont données . Elles peuvent donc souvent être vérifiées par récurrence.

J'ai en général choisi de faire le calcul par manipulation de Σ , comme on est obligé de le faire dans un sujet ne donnant pas le second membre.

PRELIMINAIRE

1. On a une série de Riemann avec $a = 2 > 1$. La série converge

2. Les deux séries $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2}$ et $V = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ convergent . On peut donc dans S séparer les termes pairs et impairs :

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

mais :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{S}{4}$$

donc

$$\boxed{V = \frac{3}{4}S}$$

Puis

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \\ &= \frac{1}{4}S - \frac{3}{4}S = -\frac{1}{2}S \end{aligned}$$

$$\boxed{W = -\frac{1}{2}S}$$

Première partie

1. On sait que la somme des racines σ_1 est égale à $-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$

   Le calcul se fait par récurrence en écrivant pour l'hérédité que si :

$$(X-x_1)(X-x_2)\cdots(X-x_{n-1}) = X^{n-1} - \sum_{i=1}^{n-1} x_i X^{n-2} + R_n \text{ avec } d^\circ(R_n) < n-2$$

   alors :

$$\begin{aligned} (X-x_1)(X-x_2)\cdots(X-x_{n-1})(X-x_n) &= \left(X^{n-1} - \sum_{i=1}^{n-1} x_i X^{n-2} + R_n\right)(X-x_n) \\ &= X^n - \sum_{i=1}^{n} x_i X^{n-1} + S_n \text{ avec } d^\circ(S_n) < n-1 \end{aligned}$$

   puis en multipliant par le coefficient dominant.

2. 1. D'après la formule de Moivre, $\cos((2p+1)\varphi) + i\sin((2p+1)\varphi)) = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^{2p+1}$. On développe grâce à la formule du binôme de Newton et on prend la partie imaginaire

$$(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))^{2p+1} = \sum_{j=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{j} (\cos(\varphi))^{2p+1-j} (i\sin(\varphi))^j$$

   la partie imaginaire correspond aux termes impairs avec si $j = 2k+1$: $i^j = (-1)^k i$ donc

$$\boxed{\sin((2p+1)\varphi) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{2p+1}{2k+1} \cos^{2p+1-2k-1}(\varphi)\sin^{2k+1}(\varphi)}$$

2. Pour $\varphi \not\equiv 0[\pi]$, $\sin\varphi \neq 0$ donc on peut factoriser $\sin^{2p+1}(\varphi)$pour obtenir en simplifiant $\dfrac{\cos}{\sin} = \text{cotan}$

$$\boxed{\sin\left((2p+1)\,\varphi\right) = \sin^{2p+1}(\varphi)\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{2p+1}{2k+1}\left(\text{cotan}\left(\varphi\right)\right)^{2p-2k}}$$

3. 1. D'après la relation précédente, $P(\gamma_k) = \dfrac{\sin(k\pi)}{\sin^{2p+1}(\frac{k\pi}{2p+1})}$.Or $k \in [[1,p]]$ donc $\dfrac{k\pi}{2p+1} \neq 0[\pi]$

$$\boxed{P\left(\gamma_k\right) = 0}$$

2. Si $k \in [1,p]$, $\dfrac{k\pi}{2p+1} \in [\dfrac{\pi}{2p+1}; \dfrac{p\pi}{2p+1}] \subset]0; \dfrac{\pi}{2}[$.
La fonction $t \mapsto \text{cotan}^2(t)$ est continue strictement monotone sur $]0; \dfrac{\pi}{2}[$ donc bijective de cet intervalle sur son image.
Les $\dfrac{k\pi}{2p+1}$ étant deux à deux distincts les γ_k le sont aussi.
On a donc obtenu p racines distinctes pour le polynôme P. Celui ci est de degré p donc on a trouvé toutes les racines de P et elles sont toutes simples.

$$\underline{P \text{ admet } p \text{ racines simples qui sont les } \gamma_k,\ k \in [1;p]}$$

.

3. D'après la formule sur la somme des racines de la question 1.

$$,\sum_{k=1}^{p}\gamma_k = -\frac{(-1)^1\dbinom{2p+1}{2\times 1+1}}{(-1)^0\dbinom{2p+1}{1}} = \frac{\dfrac{(2p+1)(2p)(2p-1)}{6}}{2p+1}$$

d'où

$$\boxed{\sum_{k=1}^{p}\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \frac{p(2p-1)}{3}}$$

Pour $\varphi \in \mathbb{R}$ $\phi \neq 0[\pi]$,

$$\text{cotan}^2\left(\varphi\right) + 1 = \frac{\cos^2(\varphi) + \sin^2\left(\varphi\right)}{\sin^2\left(\varphi\right)} = \frac{1}{\sin^{é}\left(\varphi\right)}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2p+1}\right)} = \frac{p(2p-1)}{3} + p = \frac{p(2p-1+3)}{3}$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{2p+1}\right)} = \frac{2p(p+1)}{3}$$

4. 1. Sur $[0; \dfrac{\pi}{2}]$, la fonction sin est positive et strictement concave. Son graphe est strictement au dessus de la tangente en $(0,0)$ qui est la droite $y = x$ donc, pour $\varphi \in]0; \dfrac{\pi}{2}]$, $\sin\left(\varphi\right) < \varphi$.
De même la fonction tan est strictement convexe de même tangente en $(0,0)$ donc pour $\varphi \in]0; \dfrac{\pi}{2}[$, $\varphi < \tan\left(\varphi\right)$.
pour $\varphi \in]0; \dfrac{\pi}{2}]$, $\sin(\varphi) > 0$ est connu.
remarque : on peut aussi étudier les variation de $x \to x - \sin(x)$ et de $x \to x - \tan(x)$

2. Pour $k \in [[1,p]]$, on utilise l'inégalité précédente avec $\varphi = \dfrac{k\pi}{2p+1} \in]0; \dfrac{\pi}{2}[$:

$$\sin\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) < \frac{k\pi}{2p+1} < \tan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)$$

Tout étant strictement positif on peut composer avec la fonction $t \mapsto 1/t^2$, strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$:

$$\text{cotan}\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) < \frac{(2p+1)^2}{(k\pi)^2} < \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right)}$$

On somme pour k allant de 1 à p en utilisant les formules de la question 3.c, on obtient :

$$\frac{p(2p-1)}{3} < \frac{(2p+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^2} < \frac{2p(p+1)}{3}$$

3. On divise par $\dfrac{(2p+1)^2}{\pi^2}$:

$$\frac{p(2p-1)\pi^2}{3(2p+1)^2} < s_p < \frac{2p(p+1)\pi^2}{3(2p+1)^2}$$

Daprès le théorème d'encadrement, les deux suites $\left(\dfrac{p(2p-1)\pi^2}{3(2p+1)^2}\right)$ et $\left(\dfrac{2p(p+1)\pi^2}{3(2p+1)^2}\right)$ convergent vers la même limite $\dfrac{\pi^2}{6}$ donc la suite (s_p) converge vers cette limite:

$$\boxed{S = \frac{\pi^2}{6}}$$

Deuxième Partie

1. $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et

$$I_1 = \int_0^{\pi/2}\cos^2(t)dt = \int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos(2t)}{2} = \frac{\pi}{4}$$

2. 1. On effectue une intégration par parties : $u(t) = \cos^{2n+1} t$,$v(t) = \sin t$. u et v sont C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \left[\sin(t)\cos^{2n+1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (2n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(t)\cos^{2n}(t)\,dt \\ &= (2n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2(t))\cos^{2n}(t)\,dt = (2n+1)(I_n - I_{n+1}) \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\boxed{I_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}I_n}$$

.

2. On a donc :

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{2n-1}{2n}I_{n-1} = \frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n)(2n-2)}I_{n-2} = \cdots \\ &= \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{(2n)(2n-2)\cdots 2}I_0 = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

qui peut se vérifier par récurrence :

- $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{(0)!}{4^0(0!)^2}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $I_n = \dfrac{(2n)!}{4^n n!^2}\dfrac{\pi}{2}$alors

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{2n+1}{2n+2}.\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2}.\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n+2)!}{4^{n+1}((n+1)!)^2}\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{I_n = \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\frac{\pi}{2}}$$

3. 1. Dans I_n, on effectue une intégration par parties en posant $u(t) = \cos^{2n} t$ et $v(t) = t$ qui sont bien C^1 sur $[0, \pi/2]$

$$I_n = [t\cos^{2n}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\cos^{2n-1}(t)\,dt = 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\cos^{2n-1}(t)\,dt$$

On effectue une nouvelle intégration par parties en posant $u(t) = \sin t\cos^{2n-1} t$ et $v(t) = \dfrac{t^2}{2}$ qui sont bien C^1 sur $[0, \pi/2]$:

$$\begin{aligned} I_n &= 2n[\frac{t^2}{2}\sin(t)\cos^{2n}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2}\left[\cos^{2n}(t) - (2n-1)\sin^2(t)\cos^{2n-2}(t)\right] dt \\ &= -2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2}\left[\cos^{2n}(t) - (2n-1)\left(1-\cos^2(t)\right)\cos^{2n-2}(t)\right] dt \\ &= -nJ_n + n(2n-1)J_{n-1} - n(2n-1)J_n \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{I_n = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n}$$

2. On multiplie cette égalité par $\dfrac{4^n(n!)^2}{(2n)!}$. Avec la question 2.b),

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}\left(n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n\right) \\ &= 2n^2\left\{\frac{4^{n-1}((n-1)!)^2}{(2n-2)!}J_{n-1} - \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}J_n\right\} \end{aligned}$$

car :

$$\begin{aligned} \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}.n(2n-1) &= \frac{4.n^2}{(2n)(2n-1)}.\frac{4^{n-1}((n-1)!)^2}{(2n-2)!}.n(2n-1) \\ &= 2n^2.\frac{4^{n-1}((n-1)!)^2}{(2n-2)!} \end{aligned}$$

En divisant par $2n^2$, on obtient

$$\boxed{K_{n-1} - K_n = \frac{\pi}{4n^2}}$$

3. On somme pour k allant de 1 à n :

$$\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = K_0 - K_n$$

Or $K_0 = J_0$ donc

$$\boxed{\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = J_0 - K_n}$$

4. 1. Toujours la concavité de sin en comparant la courbe et la corde entre $(0,0)$ et $(\pi/2, 1)$ qui a pour équation $y = \dfrac{2}{\pi}x$. On a donc :

$$\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}],\ x \leq \frac{\pi}{2}\sin(x)$$

2. On élève cette inégalité au carré (tout est positif) et on multiplie par $\cos^{2n}(t) \geq 0$:

$$\forall t \in [0; \frac{\pi}{2}],\ 0 \leq t^2\cos^{2n}(t) \leq \frac{\pi^2}{4}\sin^2(t)\cos^{2n}(t)$$

On intègre cette inégalité entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$ (bornes dans le bon sens):

$$0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(t)\cos^{2n}(t)\,dt$$

Dans cette dernière intégrale, on effectue une intégration par parties en posant $u(t) = \sin t$ et $v(t) = \dfrac{-1}{2n+1}\cos^{2n+1} t$ (fontion C^1 sur $[0, \pi/2]$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(t)\cos^{2n}(t)\,dt = \frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+2}(t)\,dt = \frac{1}{2n+1}I_{n+1}$$

d'où

$$0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2 I_{n+1}}{4(2n+1)}$$

On multiplie alors par $\dfrac{4^n (n!)^2}{(2n)!} > 0$ et grâce à 2.b):

$$0 \leq K_n \leq \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} . \frac{\pi^2}{4(2n+1)} . \frac{(2n+2)!}{4^{n+1}((n+1)!)^2} \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{0 \leq K_n \leq \frac{\pi^3}{16(n+1)}}$$

3. Par encadrement, on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} K_n = 0$.

   La question 3.c) donne alors $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = \dfrac{4}{\pi} J_0$. Or $J_0 = \dfrac{\pi^3}{24}$ donc on retrouve $\boxed{s = \dfrac{\pi^2}{6}}$.

Troisième partie

1. D'après la formule d'Euler $\cos kx = \dfrac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}$ et si $x \not\equiv 0[2\pi]$, $e^{ix} \neq 1$ donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \cos kx &= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}}\right) \quad \text{car la raison n'est pas 1} \\
&= \operatorname{Re}\left(e^{ix} \frac{e^{inx/2}.(-2i \sin(\frac{nx}{2}))}{e^{ix/2}.(-2i \sin(\dfrac{x}{2}))}\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(e^{i(n+1)x/2} \frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\dfrac{x}{2})}\right) \\
&= \cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\dfrac{x}{2})}
\end{aligned}$$

d'où

$$D_n(x) = \frac{\sin(\dfrac{x}{2}) + 2\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\sin(\frac{nx}{2})}{2\sin(\dfrac{x}{2})}$$

Or $\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\sin(a)\cos(b)$ et donc $2\cos\left(\dfrac{(n+1)x}{2}\right)\sin(\dfrac{nx}{2}) = \sin\left(\dfrac{2n+1}{2}x\right) - \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$

$$\boxed{\forall x \not\equiv 0[2\pi],\ D_n(x) = \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\left(n + \dfrac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}}$$

2.
   1. A l'aide d'une intégration par parties, on trouve

$$\boxed{\int_0^\pi x\cos(kx)dx = \frac{(-1)^k - 1}{k^2}}$$

   2. Par linéarité de l'intégrale,

$$L_n = \int_0^\pi \frac{x}{2} dx + \sum_{k=1}^{n} \int_0^\pi x \cos kx dx$$

   Avec la question précédente, on a

$$\boxed{L_n = \frac{\pi^2}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k - 1}{k^2}}$$

3. On a donc les termes d'indices pairs étant nuls : :

$$L_n = \frac{\pi^2}{4} - 2 \sum_{p=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

et donc

$$\boxed{\lim_{n->+\infty} (L_n) = \frac{\pi^2}{4} - 2V}$$

3. f est de classe C^1 sur $]0;\pi]$ en tant que quotient de fonctions C^1 dont le dénominateur ne s'annule pas.
3/2 : comme $\sin(u) \sim_0 u$, on a un prolongement par continuité en 0 et $f(0) = 2$
On a aussi pour $x \in]0;\pi]$,

$$f'(x) = \frac{\sin\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \sim_0 \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3}{1.\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{x}{6}$$

En utilisant $\tan(u) =_0 u + \dfrac{u^3}{3} + o(u^3)$.
Par conséquent

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0}$$

f est continue sur $[0;\pi]$, C^1 sur $]0;\pi]$ et f' a une limite finie en 0 donc, d'après le théorème de prolongement des fonctions de classe C^1, f est de classe C^1 sur $[0;\pi]$.
5/2 : On a pour $x \neq 0$:

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{\sin(x/2)}{x} = \frac{1}{x}\frac{\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k (x/2)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+1}(2k+1)!} x^{2k}.$$

La formule est vraie aussi pour $x = 0$ en prolongeant par continuité..Donc $\dfrac{1}{f}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ donc C^∞ sur $\mathbb{R}$. Comme g ne prend pas la valeur 0 sur $[0,\pi]$, $f = \dfrac{1}{g}$ est C^∞ sur $[0,\pi]$.

4. Pour $\lambda > 0$, par intégration par parties ϕ et $x -> -\dfrac{\cos(\lambda x)}{\lambda}$ étant bien C^1 sur $[0,\pi]$

$$\int_0^\pi \phi(x)\sin(\lambda x)dx = \frac{\phi(0)}{\lambda} - \frac{\phi(\pi)\cos(\lambda\pi)}{\lambda} + \int_0^\pi \phi'(x)\frac{\cos\lambda x}{\lambda}dx$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^\pi \phi(x)\sin(\lambda x)dx\right| &\leq \left|\frac{\phi(0)}{\lambda}\right| + \left|\frac{\phi(\pi)\cos(\lambda\pi)}{\lambda}\right| + \left|\int_0^\pi \phi'(x)\frac{\cos\lambda x}{\lambda}dx\right| \\
&\leq \left|\frac{\phi(0)}{\lambda}\right| + \left|\frac{\phi(\pi)\cos(\lambda\pi)}{\lambda}\right| + \int_0^\pi |\phi'(x)|\frac{1}{\lambda}dx \\
&\leq \frac{1}{\lambda}\left\{|\phi(0)| + |\phi(\pi)\cos(\lambda\pi)| + \int_0^\pi |\phi'(x)|\,dx\right\}
\end{aligned}$$

et donc par encadrement :

$$\boxed{\lim_{\to+\infty} \int_0^\pi \phi(x)\sin(\lambda x)dx = 0}$$

remarque : on a vu en TD que la limite reste nulle si f est seulement continue (il suffit d'approcher la fonction uniformément par des polynômes)

5. 1. Pour $n \geq 1, L_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)dx$ et f est de classe C^1 sur $[0;\pi]$ donc, d'après la question précédente, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} L_n = 0$.

   2. On a alors, en passant à la limite dans la relation de la question 2.b), $0 = \dfrac{\pi^2}{4} - 2V$. donc $V = \dfrac{\pi^2}{8}$ et en utilisant le préliminaire $S = \dfrac{\pi^2}{6}$

Quatrième partie

1. 1. Par décroissance de la fonction $t->1/t$ sur $[k,k+1]$ on a

$$\frac{1}{k+1}\leq\int_k^{k+1}\frac{dt}{t}\leq\frac{1}{k}$$

donc en sommant de $k=1$ à n :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\leq\ln(n+1)\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

on a tout de suite $\ln(N+1)\leq\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}=H_N$

l'autre inégalité donne pour $N\geq 2$: $\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{k+1}\leq\ln(N)$ et donc avec changement d'indice $\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{k}\leq\ln(N)$. On ajoute le premier terme $\frac{1}{1}=1$
la relation restant vraie si $N=1$.

$$\boxed{\ln(1+N)\leq H_N\leq 1+\ln N}$$

2. On divise par $N>0$,

$$\frac{\ln(1+N)}{N}\leq\frac{H_N}{N}\leq\frac{\ln N}{N}$$

Avec le théorème d'encadrement, on peut alors conclure $\boxed{\lim_{N\to+\infty}\frac{H_N}{N}=0}$.

3. Pour $M\geq 1$,on utilise la décomposition classique : $\frac{1}{m(m+1)}=\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}$

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{M}\frac{H_m}{m(m+1)} &= \sum_{m=1}^{M}H_m\frac{1}{m(m+1)}=\sum_{m=1}^{M}H_m\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)\\ &= \sum_{m=1}^{M}H_m\frac{1}{m}-\sum_{m=1}^{M}H_m\frac{1}{m+1}=\sum_{m=1}^{M}H_m\frac{1}{m}-\sum_{m=2}^{M+1}H_{m-1}\frac{1}{m}\\ &= \frac{H_1}{1}+\sum_{m=2}^{M}\left(H_m-H_{m-1}\right)\frac{1}{m}-\frac{H_M}{M+1}\\ &= 1+\sum_{m=2}^{M}\frac{1}{m^2}-\frac{H_M}{M+1}=\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{m^2}-\frac{H_M}{M+1}\end{aligned}$$

4. On sait que $\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^2}=\frac{\pi^2}{6}$; de plus $\frac{H_M}{M+1}=\frac{H_M}{M}.\frac{M}{M+1}$ tend vers 0 si M tend vers $+\infty$. Donc :

$$\boxed{\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{H_m}{m(m+1)}=\frac{\pi^2}{6}}$$

2. 1. Pour $(n,m)\in\mathbb{N}^*$, on peut toujours décomposer $\frac{1}{n(n+m-1)}=\frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+m-1}\right)$ donc, en sommant pour n variant de 1 à N

$$Z_{N,m}=\frac{1}{m-1}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+m-1}\right)$$

.
Dans la première somme on "change" d'indice en prenant $p=n$ et dans la seconde somme, on change d'indice $p=n+m-1$:
On force alors l'apparition de H_{m-1} dans la seconde expression.

$$\begin{aligned}Z_{N,m} &= \frac{1}{m-1}\left(\sum_{p=1}^{N}\frac{1}{p}-\sum_{p=m}^{N+m-1}\frac{1}{p}\right)\\ &= \frac{1}{m-1}\left(\sum_{p=1}^{N}\frac{1}{p}-\left(\sum_{p=1}^{N+m-1}\frac{1}{p}-\sum_{p=1}^{m-1}\frac{1}{p}\right)\right)\end{aligned}$$

Les deux premières sommes se simplifient et on obtient

$$\boxed{Z_{N,m} = \frac{1}{m-1}\left(H_{m-1} - \sum_{p=N+1}^{N+m-1} \frac{1}{p}\right)}$$

Il est aussi possible de dire que pour $N > m-1$: $\displaystyle\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p} = \sum_{p=1}^{m-1} \frac{1}{p} + \sum_{p=m}^{N} \frac{1}{p}$ *et pour $N < m-1$:* $\displaystyle\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p} = \sum_{p=1}^{m-1} \frac{1}{p} - \sum_{p=N+1}^{m-1} \frac{1}{p}$ *. il faut alors rédiger 3 cas.*

2. Quand N tend vers l'infini, $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{N+m-1} \frac{1}{n} = \sum_{p=1}^{m-1} \frac{1}{N+p}$ est la somme de $m-1$ termes tendant vers 0, les bornes étant indépendantes de N, donc $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{N+m-1} \frac{1}{n}$ tend aussi vers 0 et

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} Z_{N,m} = \frac{H_{m-1}}{m-1}}$$

.

3. 1. On permute les deux sommes (nombre fini de termes) :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} \frac{1}{nm(n+m-1)} &= \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{nm(n+m-1)} \\
&= \sum_{m=1}^{1}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{nm(n+m-1)} + \sum_{m=2}^{M}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{nm(n+m-1)} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} + \sum_{m=2}^{M} \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+m-1)}
\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} \frac{1}{nm(n+m-1)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} + \sum_{m=2}^{M} \frac{Z_{N,m}}{m}}$$

2. $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et, pour chaque m entre 2 et M, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{Z_{N,m}}{m} = \frac{H_{m-1}}{m(m-1)}$. En additionnant ces $1 + M - 1$ limites, on obtient, avec la question précédente,

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} \frac{1}{nm(n+m-1)} = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{m=2}^{M} \frac{H_{m-1}}{m(m-1)}$$

On a alors

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} \frac{1}{nm(n+m-1)} = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{m=1}^{M-1} \frac{H_m}{(m+1)m}$$

et, d'après la question 1.d),

$$\boxed{\lim_{M\to+\infty}\left(\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} \frac{1}{nm(n+m-1)}\right) = \frac{\pi^2}{3}}$$