d'après e4a PSI 2005 - épreuve B-exercice 1

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels et n un entier naturel.

Partie A.

Dans cette partie, on établit quelques résultats préliminaires.

1. Pour $n \geq 1$, on pose : $u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) - \ln(n)$.
   Donner un équivalent de la suite $(u_{n+1} - u_n)$
   En déduire que la suite (u_n) converge . On note γ sa limite.
2. Pour x élément de $]0, +\infty[$, on considère l'application h_x de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
   $$h_x(t) = \frac{\ln(t)}{t^x}$$
   Déterminer le tableau de variation de h_x.
3. Justifier les inégalités : $\forall n \geq 3,\ \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\, dt \leq \frac{\ln(n)}{n}$ et $\forall n \geq 4,\ \frac{\ln(n)}{n} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{\ln(t)}{t}\, dt$.
4. Calculer une primitive de $\frac{\ln(t)}{t}$. Quelles inégalités déduit-on de la question précédente ?
5. Prouver que la série $\sum (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ est convergente mais qu'elle n'est pas absolument convergente.
   On pose :
   $$S = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$$

Les deux parties qui suivent sont indépendantes l'une de l'autre.

Partie B.

On se propose dans cette partie de calculer S.
Pour $n \geq 3$, on pose
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k},\ t_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k},\ a_n = t_n - \frac{(\ln(n))^2}{n}$$

1. Utiliser les inégalités établies en question 4 de la partie A pour démontrer que :

a. la suite $(a_n)_{n \geq 3}$ est décroissante

b. La suite $(a_n)_n$ converge.

2. En écrivant :
   $$\forall n \geq 3, S_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\ln(2k+1)}{2k+1}$$
   montrer que:
   $$\forall n \geq 3, S_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2) + \ln(k)}{k} - t_{2n}$$
   en déduire :
   $$\forall n \geq 3,\ S_{2n} = t_n - t_{2n} + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) \ln(2)$$
   En déduire une expression de S_{2n} où figurent a_n, a_{2n} et u_n.
3. Calculer $\lim_{n \to +\infty} S_{2n}$ (on exprimera cette limite en fonction de γ et de $\ln(2)$). déterminer S.

Partie C. (uniquement 5/2)

On note F l'application de $]1,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

Pour $n \geq 1$, on considère l'application ϕ_n de $]0,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$\phi_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$$

Dans cette partie on étudie d'abord le comportement de $F(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures, ensuite la série de fonction $\sum \phi_n$, puis on trouve la valeur de S.

1. Pour $n \geq 1$, on considère les applications v_n et w_n de $[1,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définies par

$$v_n(x) = \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x} \quad \text{et} \quad w_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\, dt$$

a. i. Calculer $v_n'(x)$.

ii. Montrer que la série de fonctions $\sum v_n$ est normalement convergente sur $[1,+\infty[$.

b. i. Calculer $w_n(x)$ et prouver que pour $n \geq 1$, w_n est continue sur $[1,+\infty[$.

ii. Montrer que $\forall x \geq 1,\ \forall n \geq 1,\ 0 \leq w_n(x) \leq v_n(x)$.

iii. On considère la fonction W définie par $W = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n$.
Démontrer que W est définie et continue sur $[1,+\infty[$.

c. i. Montrer que $\forall x > 1,\ W(x) = F(x) + \frac{1}{1-x}$.

ii. Calculer $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(F(x) + \frac{1}{1-x}\right)$ (on exprimera le résultat en fonction de γ).

2.

a. Montrer que la série de fonctions $\sum \phi_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

c. On considère la fonction ϕ définie par $\phi = \sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n$. Montrer que ϕ est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$.

On admettra que ϕ est aussi dérivable en 1 et que $\phi'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \phi_n'(1)$. vérifier que $\phi'(1) = S$

3.

a. En simplifiant $F(x) - \phi(x)$ établir que : $\forall x > 1,\ \phi(x) = (1 - 2^{1-x})F(x)$.

b. Déterminer un développement limité de $1 - 2^{1-x}$ à l'ordre 2 au voisinage de 1, puis un développement limité de $\phi(x)$ à l'ordre 1 au voisinage de 1. En déduire la valeur de S