On dit qu'une suite réelle $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **quasi périodique** lorsqu'elle est périodique à partir d'un certain rang, c'est-à-dire s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$(\mathcal{R}) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Rightarrow a_{n+p} = a_n$$

(L'entier p est une période de la suite $(a_n)_{n\geq n_0}$).
On note QP l'ensemble des suites quasi périodiques de réels.
L'objet du problème est d'étudier quelques propriétés élémentaires de ces suites et le caractère quasi périodique éventuel de suites simples.

PARTIE 1

1. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de QP et $\mathcal{P}(a)$ l'ensemble des périodes de a

$$p \in \mathcal{P}(a) \Longleftrightarrow p > 0 \text{ et } (\exists n_p \in \mathbb{N} \ , \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_p \Rightarrow a_{n+p} = a_n)$$

   1. Soit $p \in \mathcal{P}(a)$ montrer que pour tout entier k , $kp \in \mathcal{P}(a)$
   2. Soit p et q deux éléments de $\mathcal{P}(a)$ tels que $q < p$. Montrer que $p + q \in \mathcal{P}(a)$ et $p - q \in \mathcal{P}(a)$
   3. Montrer qu'il existe un entier $T = \min\{p \in \mathcal{P}(a), p > 0\}$
   4. Soit $p \in \mathcal{P}(a)$. On écrit la division euclidienne de p par T : $p = qT + r$, $q \in \mathbb{N}$, $r \in [[0, T-1]]$
   Montrer que si r est non nul , $r \in \mathcal{P}(a)$ et en déduire une absurdité.
   5. En déduire
   $$\mathcal{P}(a) = \mathbb{N}^*T = \{kT, \ k \in \mathbb{N}^*\}.$$
   T est **la** période de la suite a .
   6. Que peut-on dire de la suite lorsque $T = 1$?
   7. Montrer qu'il existe un plus petit entier n_0 tel que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Rightarrow a_{n+T} = a_n.$$

2. Montrer que QP est un sous espace vectoriel de l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles. Est-il de dimension finie?

PARTIE II

1. **Exemple 1**

   On définit la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

   $$F_0 = 0, \ F_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

   et la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_n = 0$ si F_n est pair et $a_n = 1$ sinon. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle quasi périodique?

   Montrer que la série $\sum a_n x^n$ converge si $|x| < 1$. Calculer dans ce cas $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

2. **Exemple 2**

   Soit $x = \dfrac{a}{b}$ un rationnel strictement positif, donné sous forme irréductible. On définit deux suites d'entiers $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

   • d_0 est le quotient et r_0 est le reste de la division euclidienne de a par b.

   • pour tout $n \geq 1$, r_n (resp. d_n) est le reste (resp. le quotient) de la division euclidienne de $10.r_{n-1}$ par b.

1. Dans cette question (uniquement), $x = \dfrac{22}{7}$. Déterminer $d_0, d_1, \ldots, d_{10}$.
2. Montrer que $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est fini.
   En déduire que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est quasi périodique. Qu'en est-il de $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \le d_n \le 9$.
4. Établir l'égalité :
   $$x = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n 10^{-n}.$$
   on pourra commencer par simplifier $x - S_n$ où S_n est une somme partielle de la série.

PARTIE III

Le but de cette partie est de montrer que le réel π n'est pas un élément de $\mathbb{Q}$.
$E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans lui-même. Pour tout élément f de E, on note F l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x t f(t)\, dt.$$

On note L l'application définie sur E et qui à tout élément f associe F .

1. Vérifier que L est une application linéaire de E dans E.

   Si f est un élément de E , on définit une suite d'éléments de E par $f_0 = f$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $f_{n+1} = L(f_n)$.

2. On considère dans cette question un élément f de E supposé borné sur $\mathbb{R}$ et on note $M = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.

   1. Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$,
      $$|F(x)| \le M\frac{x^2}{2}.$$
   2. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $\mathbb{R}$,
      $$|f_n(x)| \le \frac{x^{2n}}{2.4\ldots 2n} M.$$
   3. En déduire la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$ et calculer la limite de cette suite.

3. On prend maintenant dans cette question et dans les suivantes $f = \sin$, et on considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie au début de cette partie.

   1. Déterminer les fonctions f_0, f_1 et f_2.
   2. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $\mathbb{R}$,
      $$f_{n+1}(x) = (2n+1)f_n(x) - x^2 f_{n-1}(x).$$

4. Pour $p \in \mathbb{N}$, on note F_p le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynômes de degré au plus p.

   On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie dans la question précédente avec $f_0 = \sin$

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe un couple de fonctions P_n et Q_n de F_n, telles que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = P_n(x)\sin x + Q_n(x)\cos x.$$

   Montrer que ce couple est unique (indice : supposé qu'il existe deux décompositions et introduire $f_n(2p\pi), p \in \mathbb{Z}$) et exprimer P_{n+1} et Q_{n+1} en fonction de $P_n, Q_n, P_{n-1}, Q_{n-1}$

2. Montrer que les fonctions P_n sont des polynômes à coefficients entiers.

5. On suppose ici que le réel π est élément de $\mathbb{Q}$, ensemble des nombres rationnels.
   Soit donc p élément de $\mathbb{Z}$ et q élément de $\mathbb{Z}$ tels que $\pi = \dfrac{p}{q}$.

   1. Montrer que la suite
   $$\left((2q)^n P_n(\frac{\pi}{2})\right)_{n\in\mathbb{N}}$$
   est une suite d'entiers. Quelle est sa limite ?
   2. En déduire que cette suites est stationnaire nulle , puis qu'elle est constante nulle.
   3. Montrer que π n'est pas rationnel.

PARTIE IV

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $a_n = 1$ si $\sin(n) > 0$, $a_n = 0$ sinon.
Le but de cette partie est d'étudier si cette suite à valeurs entières est élément de QP.

On suppose(par l'absurde) que cette suite est quasi périodique.

1.
   1. En utilisant la partie **III** , montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sin(n) \neq 0$
   2. Montrer qu'il existe un entier strictement positif τ tels que, pour tout entier k supérieur ou égal à 1 , le signe de $\sin(k\tau)$ soit constant.
   3. Montrer $\forall k \in \mathbb{N}$, $\cos(k\tau) > 0$

2. Soit $G = \tau\mathbb{Z} + 2\pi\,\mathbb{Z} = \{n\tau + 2k\pi,\ (n,k) \in \mathbb{Z}^2\}$.

   1. Montrer que G est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.
   2. On suppose qu'il existe un $a \in \mathbb{R}$ tel que $G = a\,\mathbb{Z} = \{ap, p \in \mathbb{Z}\}$.
      - Montrer que 2π et τ sont des multiples de a.
      - Déduire une absurdité de la partie précédente.Que peut-on en conclure?
   3. On pose $G^+ = G \bigcap \mathbb{R}^{+*}$ (ensemble des éléments strictement positifs de G). Montrer que G^+ possède une borne inférieure a.
   4. On suppose $a \in G^+$ c'est à dire que a est le plus petit élément de G^+
      - Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, $ka \in G^+$
      - Montrer que pour tout $g \in G$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $g - ka \in G$ et $0 \leq g - ka < a$
      - En déduire $G = a\mathbb{Z}$
      - En déduire que a n'est pas élément de G^+
   5. . On suppose maintenant $a > 0$
      - Montrer que l'on peut trouver deux éléments g et g' de G^+ tels que $a < g' < g < 2a$.
      - Montrer $g - g' \in G^+$ et $g - g' < a$

- En déduire $a = 0$.

3.

   1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $g_n \in G$ tel que $0 < g_n < 10^{-n}$.
   2. Soit x un réel. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $\lambda_n = E\left(\dfrac{x}{g_n}\right)$
      Montrer que la suite $(\lambda_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de G convergeant vers x.

4.

   1. En choisissant bien la valeur de x , montrer l'existence d'une suite d'entiers positifs $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $(\cos(k_n\tau))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $-\dfrac{1}{2}$.
   2. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle quasi périodique ?

Partie V

Dans cette partie j'ai regroupé la fin de la partie 1 et un troisième exemple de la partie 2. Ces questions portent sur les séries entièes. Elles ne sont pas abordable par les 3/2 . Les 5/2 peuvent les aborder avec profit.

1. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quasi périodique.

   1. Montrer que a est bornée et que le rayon de convergence R_a de la série entière $\sum a_n x^n$ est strictement positif. À quelle condition nécessaire et suffisante R_a est-il égal à $+\infty$? Que vaut-il sinon?
   2. Montrer que la somme de cette série est une fraction rationnelle. Dans quel cas est-ce un polynôme ?

2. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, dont la somme est la restriction à $]-R, R[$ d'une fraction rationnelle.
   La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle quasi périodique ?

3. On définit maintenant la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$a_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n} = a_n \text{ et } a_{2n+1} = -a_n.$$

   1. calculer les termes de la suite pour $n \leq 10$.
   2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$. On note S sa somme.
   3. Montrer $\forall x \in]-1, 1[$, $S(x) = (1-x)S(x^2)$
   4. En déduire que, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$S(x) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} (1 - x^{(2^k)}).$$

   5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.Montrer

$$\frac{S(x)}{(1-x)^n} = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1 - x^{(2^k)}}{1-x}\right)(1 - x^{(2^n)})S(x^{(2^{n+1})})$$

      En déduire :

$$\lim_{x\to 1^-} \left(\frac{S(x)}{(1-x)^n}\right)$$

   6. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle quasi périodique ?