CENTRALE 1997
TSI

IA1) Les matrices symétriques vérifient $b = k, c = r, m = s$. Une matrice est symétrique si et seulement si elle s'écrit

$$aE_1 + b(E_2 + E_4) + c(E_3 + E_7) + lE_5 + m(E_6 + E_8) + tE_9$$

On a donc : $S = Vect(E_1, E_5, E_9, E_2 + E_4, E_3 + E_7, E_6 + E_8)$.
Or ces six matrices forment un système libre (Ecrire une combinaison linéaire et c'est évident).$(E_1, E_5, E_9, E_2 + E_4, E_3 + E_7, E_6 + E_8)$ est une base de S et $\dim(S) = 6$
De même $(E_2 - E_4, E_3 - E_7, E_6 - E_8)$ est une base de A .

$$\boxed{\dim(S) = 6, \dim(A) = 3}$$

IA2) La trace est une application linéaire . T est donc le noyau d'une forme linéaire ; c'est donc un sous espace vectoriel. D'après le théorème du rang

$$\dim\left(\mathcal{M}_3\left(\mathbb{R}\right)\right) = \dim(T) + \dim(\mathrm{Im}(s_7))$$

Or $\mathrm{Im}(s_7)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}$ non réduit à zéro ($s_7(I) = 3$) .Donc $\mathrm{Im}(s_7) = \mathbb{R}$.

$$\boxed{T \text{ est un sous espace de } \mathcal{M}_3\left(\mathbb{R}\right) \text{ de dimension } 8}$$

IA3)

- $S \cap T$ est un sous espace vectoriel (intersection de sous espace vectoriel) et est inclus dans S par définition. $V = Vect(J)$ est un sous espace vectoriel par définition .
- J est une matrice symétrique donc $J \in S$ et donc $V \subset S$.
- $(S \cap T) \cap V = \{0\}$: en effet si $M = kJ \in V$ on a $s_7(M) = 3k$ et donc comme $M \in T$ on a $k = 0$ donc $M = 0$
- $S = (S \cap T) + V$:
  1. analyse : Soit $M \in S$,on cherche à décomposer $M = N + kJ$ avec $N \in S \cap T$
     En prenant la trace on a $s_7(M) = 3k$ donc $k = \frac{s_7(M)}{3}$
  2. synthèse : soient $N = M - \frac{s_7(M)}{3}J$ et $P = \frac{s_7(M)}{3}J$. On a bien :
     -$N \in S$: comme combinaison linéaire de deux matrices symétriques
     -$N \in T$: par linéarité $s_7(N) = 0$
     -$P \in V$:c'est bien un multiple de J
     -$M = N + P$
     –on a trouvé une seule solution à la décomposition donc les sous espaces sont supplémentaires.
- J n'étant pas nul on a $\dim(V) = 1$. Si deux sous espaces sont supplémentaires la dimension de l'espace est la somme des dimensions des sous espaces . donc $\dim(S \cap T) = 5$

$$\boxed{S = (S \cap T) \oplus V \ , \ \dim(V) = 1 \ , \ \dim(S \cap T) = 5}$$

IA4)D'après la question précédente il suffit de montrer que A et S sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_3\left(\mathbb{R}\right)$:

- analyse: Soit $M \in \mathcal{M}_3\left(\mathbb{R}\right)$ .On cherche à décomposer $M = M_a + M_s$ avec M_a antisymétrique et M_s symétrique. Si on transpose la relation on a ${}^tM = -M_a + M_s$. D'où par combinaison linéaire des égalités :$M_a = \frac{M - {}^tM}{2}$, $M_s = \frac{M + {}^tM}{2}$
- synthèse:Soient $M_a = \frac{M - {}^tM}{2}$, $M_s = \frac{M + {}^tM}{2}$ on a bien:
  1. M_a antisymétrique car ${}^tM_a = -M_a$ par linéarité de la transposition
  2. M_s symétrique car ${}^tM_s = M_s$
  3. $M_a + M_s = M$ Vérification immédiate.
  4. on a trouvé une seule solution à la décomposition donc les sous espaces sont supplémentaires.

$$\boxed{\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) = A \oplus (S \cap T) \oplus V}$$

IB1) Chaque application s_i est linéaire comme somme d'applications linéaires (des fonctions coordonnées). Le _-uplet est donc linéaire.
IB2) On met en colonne l'image des matrices de base

$$Mat_B(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ k \\ l \\ m \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que l'on retrouve les s_i en multipliant par la colonne X à droite .
IB3) Si on note $(L_i)_{i=1}^{8}$ les lignes de la matrice de ϕ et si on suit le plan du sujet :

- On remarque que $L_1 + L_2 + L_3 = L_4 + L_5 + L_6$. Ces 6 lignes sont liées et L_6 est combinaison linéaire de $(L_i)_{i=1}^{5}$
- On vérifie que $(L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_7, L_8)$ est libre :
  Soit $\sum_{i \neq 6} x_i L_i = (0)$ On a donc le système de 7 inconnues et 9 équations à résoudre :

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + x_8 = 0 \\ x_1 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_8 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_5 + x_7 + x_8 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_8 = 0 \\ x_3 + x_5 = 0 \\ x_3 + x_7 = 0 \end{cases}$$

  Sur votre copie vous pouvez facilement mettre en colonne les variables.

  On a déjà $x_2 = 0$ et donc $x_4 = 0$ avec les équations 6 puis 4 .On reporte ces valeurs dans les autres équations..Les équations 1 et 3 sont alors identiques . Les ligne 1 et 2 donnent $x_8 = x_5 = -x_1$, les équations 7,8,9 donnent $x_5 = x_7 = x_8 = -x_3$ .On a donc

$$x_5 = x_7 = x_8 = -x_3 = -x_1$$

  En reportant dans l'équation 5 $x_5 = x_7 = x_8 = 0$ et donc $x_1 = x_3 = 0$.

  Remarque :C'est un raisonnement par implication et non par équivalence .Mais on sait que cela suffit pour prouver "libre".

IB4) D'après le théorème du rang le noyau de ϕ est donc de dimension 2 ;

$$\boxed{rang(\phi) = 7, \dim(Ker(\phi)) = 2}$$

IC1) D'après le théorème du rang la dimension de $H = Ker(\lambda)$ est $p-1$.En effet l'image de λ est un sous espace vectoriel non réduit à 0 de $\mathbb{R}$ donc c'est $\mathbb{R}$ entier.
IC2) Un élément du noyau de λ' est un élément de F d'image nul. C'est donc un élément de F qui est dans H .La réciproque se rédige sans problème:

$$\boxed{Ker(\lambda') = F \cap H}$$

IC3) λ' est une application linéaire de F dans $\mathbb{R}$ .On a donc deux cas possible en utilisant le théorème du rang :

- $\mathrm{Im}(\lambda') = \{0\}$ et $\dim(F \cap H) = q$
- $\mathrm{Im}\left(\lambda'\right) = \mathbb{R}$ et $\dim(F \cap H) = q - 1$

IC4) Si $\dim(F\cap H)=q$ alors $F\cap H$ est un sous espace vectoriel de F de même dimension finie donc $F\cap H=H$. Par la contraposée :

$$(\exists v\in F-(F\cap H))\Longrightarrow \dim(F\cap H)=q-1$$

IIA1) Les 7 applications $(s_i-s_1)_{i=1}^{7}$ sont des applications linéaires et par définition $\mathcal{M}$ est l'intersection de leur noyau. Donc $\mathcal{M}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
IIB1) Les deux ensembles proposés sont des intersections de sous espaces vectoriels donc des sous espaces vectoriels .

- On a $\mathcal{M}\cap S\cap T=\mathcal{M}\cap Ker(\phi)$. Donc déjà la dimension est au plus 2 ;
  On est conduit à résoudre le système linéaire :(5 équations à cause de la symétrie)

$$\begin{cases} a+b+c=0\\ b+l+m=0\\ c+m+t=0\\ a+l+t=0\\ 2c+l=0\end{cases}$$

  Un pivot de Gauss rédigé (qui commence par $L_4\leftarrow L_4-L_1$ pour éliminer a) se ramène à un système du type :

$$\begin{cases} a+b+c=0\\ b+l+m=0\\ c+m+t=0\\ l+m+t=0\\ m+t=0\end{cases}$$

  On peut donc exprimer (a,b,c,l,m) en fonction de t .

$$\boxed{\mathcal{M}\cap S\cap T=Vect\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}}$$

- Un calcul plus simple (système 3×3) donne

$$\boxed{\mathcal{M}\cap A=Vect\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}}$$

IIIB2)*Danger :on a vu en T.D que :$A\cap(B+C)\neq(A\cap B)+(A\cap C)$ en prenant trois droites dans le plan. Ici on a un cas particulier car $C\subset A$*
On a bien que $(\mathcal{M}\cap S)$ et V sont des sous espaces vectoriels de $\mathcal{M}$
Si on reprend l'analyse du $IA3$ on a :Soit $M\in S\cap\mathcal{M}$ et si on cherche à décomposer $M=N+P$ on a $N=M-\frac{s_7(M)}{3}J$ et $P=\frac{s_7(M)}{3}J$
Reste à vérifier :

1. N est dans S et T d'après $IA3$. De plus M et J sont dans $\mathcal{M}$ donc par combinaisons linéaires N est dans $\mathcal{M}$
2. P est dans V
3. $M=N+P$

L'intersection est réduite à $\{0\}$ car c'était vrai pour $S\cap V\cap T$

$$\boxed{\mathcal{M}\cap S=(\mathcal{M}\cap S\cap T)\oplus V}$$

IIC1) On vérifie facilement que la transposée d'une matrice magique est une matrice magique. La décomposition du IA4 permet alors de conclure facilement en vérifiant que :

$$\frac{M\pm^t M}{2}\in\mathcal{M}$$

IIC2) En dimension finie si F et G sont supplémentaires dans E une base de E est obtenue en faisant la réunion d'une base de F et d'une base de G .

Donc ici une base de $\mathcal{M}$ est obtenue par réunion d'une base de $(\mathcal{M} \cap \mathcal{A})$ et d'une base de $(\mathcal{M} \cap \mathcal{S})$ .Donc d'après II3b par réunion d'une base de $(\mathcal{M} \cap \mathcal{A})$ de $(\mathcal{M} \cap \mathcal{S} \cap \mathcal{T})$ et d'une base de V .

$$\mathcal{M} = Vect\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

en appelant $(-x, y, z)$ les coordonnées dans cette base on a la formule voulue.

IIC3) On doit donc résoudre le système linéaire :

$$\begin{cases} x + z = 3 \\ -x + y + z = 4 \\ -y + z = 5 \end{cases}$$

Le déterminant du système vaut 3 . Le système est de Cramer et la solution est unique . En calculant les déterminants : $x = -1, y = -1, z = 4$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

IIC4)T est le noyau d'une forme linéaire (la trace) . Donc d'après IC $\dim(\mathcal{M} \cap \mathcal{T}) = \in$ ou 3 .Or $J \in \mathcal{M}$ et $J \notin T$. Donc d'après IC4

$$\boxed{\dim(\mathcal{M} \cap \mathcal{T}) = 2}$$