e3a PSI 2007 Math A

1. Quelques calculs préliminaires.

1. On a

$$A+I_3=\begin{pmatrix}3&-3&3\\-3&4&-4\\-3&4&-4\end{pmatrix},\ (A+I_3)^2=9\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\-1&1&-1\end{pmatrix},\ A-2I_3=\begin{pmatrix}0&-3&3\\-3&1&-4\\-3&4&-7\end{pmatrix}$$

- Dans $A+I_3$ les colonnes 2 et 3 sont opposés et la colonne 1 n'est pas proportionnelle à ces colonnes : $A+I_3$ est de rang 2.
- $(A+I_3)^2$ est de rang 1., $A-2I_3$ est de rang 2

2. En utilisant le théorème du rang on en déduit que $\dim\left(\operatorname{Ker}\left\{(A+I_3)^2\right\}\right)=2$ et $\dim\left(\operatorname{Ker}\{A-2I_3\}\right)=1$. Pour montrer que $\ker((A+I_3)^2)$ et $\ker(A-2I_3)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{C}^3$, il suffit de montrer que l'intersection est réduite à $\{0\}$..
$V\in\operatorname{Ker}(A+I_3)^2\cap\operatorname{Ker}\{A-2I_3\}\Rightarrow(A+I_3)^2V=0$ et $AV=2V$. Or $(A+I_3)^2=A^2+2A+I_3$ (binôme de Newton comme les matrices commutent) .

Or $AV=2V\Rightarrow(A+I_3)^2V=\left(A^2+2A+I_3\right)V=A^2V+2AV+V=4V+4V+V=9V$ et donc $9V=0$ et donc $V=0$

$$\boxed{\ker((A+I_3)^2)\oplus\ker(A-2I_3)=\mathbb{C}^3}$$

3. On pose f tel que $Mat_{(i,jk)}(f)=A$ et on cherche une base (I,J,K) telle que $Mat_{(I,J,K)}(f)=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

- On veut $f(I)=-I$, donc $I\in\operatorname{Ker}(f+Id)$ ce qui donne le système $\begin{cases}3x-3y+3z=0\\-3x+4y-4z=0\\-3x+4y-4z=0\end{cases}$, $\exists z\in\mathbb{C}\ I=\begin{pmatrix}0\\z\\z\end{pmatrix}$
- On veut $f(J)+J=I$ ce qui donne le système $\begin{cases}3x'-3y'+3z'=0\\-3x'+4y'-4z'=z\\-3x'+4y'-4z'=z\end{cases}$, on prend z et z' comme paramètres : $\begin{cases}x'=z\\y'=z'+z\end{cases}$

  On peut prendre $I=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$
- la relation $f(K)=2K$ donne comme solution possible $K=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

les deux matrices sont semblables et une matrice de passage est $P=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&-1\\1&0&-1\end{pmatrix}$ de déterminant -1

2. Quelques propriétés de la matrice J.

$$J=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&\cdots&0\\1&0&0&\cdots&0\\0&\ddots&\ddots&&\vdots\\\vdots&\ddots&1&0&0\\0&\cdots&0&1&0\end{pmatrix}$$

1. Les $n-1$ premières colonnes de J sont indépendantes, et la dernière est nulle <u>Le rang de J vaut donc $n-1$</u>.

2.1. Soit j l'endomorphisme canoniquement associé à J et $(u_1,\dots,u_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$. On a alors

$$\forall j\in[1..n-1],\ j(e_j)=e_{j+1}\ \text{ et }\ j(e_n)=0$$

On en déduit alors, par récurrence sur $k\in[1..n-1]$,

$$\forall l\in[1,n-k],\ j^k(e_l)=e_{l+k}\ \text{ et }\forall l\in[n-k+1,n],\ j^k(e_l)=0$$

- Initialisation : par définition de Id et de j le résultat est vrai aux ordres $0 met 1$.
- Hérédité : si à l'ordre k : $\forall l \in [1, n-k],\ j^k(e_l) = e_{l+k}$ et $\forall l \in [n-k+1, n],\ j^k(e_l) = 0$ alors

$$\begin{cases} \forall l \in [1, n-k-1],\ j^{k+1}(e_l) = j(e_{l+k}) = e_{l+k+1} \\ \text{si } l = n-k\ ,\ j^k(e_{n-k}) = j(e_n) = 0 \\ \forall l \in [n-k+1, n],\ j^{k+1}(e_l) = j(O) = 0 \end{cases}$$

On en déduit que $J^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & & \vdots \\ 1 & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ où la diagonale de 1 commence sur la ligne $k+1$. On peut aussi écrire que

$$\boxed{\forall i, j \in [1..n],\ (J^k)_{i,j} = \delta_{j+k,i}}$$

On remarque que c'est encore valable si $k = 0$ (on obtient alors la matrice I_n).
On a aussi $j^n(e_l) = 0$ pour tout l et donc $J^n = 0$ et donc (on continue à multiplier par J et on obtient toujours la matrice nulle) :

$$\boxed{\forall k \geq n,\ J^k = 0_n}$$

2.2. $(J^k)^n = (J^n)^k = 0$ car $nk \geq n$. J^k est donc nilpotente.

3. Dans la somme définissant $\alpha(J)$, il n'y a qu'un nombre fini de matrices non nulles et on vient de les calculer :

$$\alpha(J) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{J^k}{k!} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{1}{1!} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2!} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \frac{1}{1!} & 1 & 0 \\ \frac{1}{(n-1)!} & \cdots & \frac{1}{2!} & \frac{1}{1!} & 1 \end{pmatrix} = (\alpha_{i,j}) \text{ avec } \alpha_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \leq j-1 \\ \dfrac{1}{(i-j)!} \text{ si } i \geq j \end{cases}$$

$U = \alpha(J) - I_n$ est la même matrice où l'on a remplacé les 1 diagonaux par des zéros.

4.

- Soient A et B deux matrices nilpotentes qui commutent. On peut trouver des entiers p et q tels que $A^p = B^q = 0$. Comme A et B commutent, on peut utiliser la formule du binôme pour obtenir

$$(A+B)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} A^k B^{p+q-k}$$

Si $k \geq p$, $A^k = A^p A^{k-p} = 0$ et si $k \leq p$ alors $p + q - k \geq q$ et $B^{p+q-k} = 0$. Ainsi, tous les termes de la somme sont nuls et $(A+B)^{p+q} = 0$.

- Il est évident que si $A^p = 0$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ alors $(\alpha A)^p = 0$
- On conclut par récurrence sur le nombre p de termes de la combinaison linéaire :
  - Initialisation : on a vu que le résultat était vrai pour $p = 2$
  - Hérédité : On suppose que pour p matrices nilpotentes A_i qui commutent et p scalaires α_i :, $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i A_i$ est nilpotente.

    Soit alors $p+1$ matrices nilpotentes B_i qui commutent et $p+1$ scalaires b_i ; on écrit :

$$\sum_{i=1}^{p+1} b_i B_i = \left(\sum_{i=1}^{p} b_i B_i \right) + (b_{p+1} B_{p+1})$$

la première matrice est nilpotente d'après l'hypothèse de récurrence , la seconde d'après la remarque précédente , et les deux matrice commutent car B_{p+1} commute avec chaque B_i pour $i \leq p$. Donc d'après l'étude de la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{p+1} b_i B_i$ est nilpotente.

5. :On a

$$U = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} J^k$$

qui est une combinaison linéaire de matrices nilpotentes qui commutent deux à deux. Avec la question précédente, U est nilpotente.
Les $n-1$ premières colonnes de U sont indépendantes (matrice "pseudo triangulaire") dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$) et la dernière est nulle . $\underline{U \text{ est donc de rang } n-1}$.

3. Quelques résultats sur les noyaux itérés d'un endomorphisme.

1. Soient $i, j \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall x \in E,\ u^{i+j}(x) = u^j(u^i(x))$$

Donc si $x \in \ker(u^i)$, $u^i(x) = 0$ puis $u^{i+j}(x) = u^j(0) = 0$ (u est linéaire) ce qui prouve l'inclusion :

$$\ker(u^i) \subset \ker(u^{i+j})$$

2. En particulier, la suite $(\ker(u^m))_{m\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion et, en passant aux dimensions , la suite $(t_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est croissante dans $\mathbb{N}$, si r n'existe pas on a pour tout m $t_m < t_{m+1}$ et donc comme on est dans $\mathbb{N}$: $t_{m+1} \geq t_m + 1$. On a donc $t_m \geq t_0 + m$ qui tend vers $+\infty$. Absurde car la suite est majoré par $n = \dim(E)$.

$$\text{il existe } r = \min\{m \in \mathbb{N} / \ t_m = t_{m+1}\}$$

3.

- Par définition de r, si $m < r$ alors $t_m \neq t_{m+1}$. Or $\ker(u^m) \subset \ker(u^{m+1})$, les sous-espaces n'ayant pas même dimension $\ker(u^m) \subsetneqq \ker(u^{m+1})$
- r étant un minimum, on a $t_r = t_{r+1}$. Or $\ker(u^r) \subset \ker(u^{r+1})$, comme on a égalité des dimensions, on a $\ker(u^r) = \ker(u^{r+1})$. Enfin, on montre par récurrence sur l'entier m que l'affirmation

$$\ker(u^m) = \ker(u^{m+1})$$

est vraie pour tout $m \geq r$.

  - Initialisation : on a vu que le résultat était vrai pour $m = r$.
  - Hérédité : soit $m \geq r$ tel que $\ker(u^m) = \ker(u^{m+1})$.
    Soit $x \in \ker(u^{m+2})$; on a $u^{m+1}(u(x)) = 0$ et donc $u(x) \in \ker(u^{m+1})$. Par hypothèse de récurrence, $\ker(u^m) = \ker(u^{m+1})$ et donc $u^m(u(x)) = 0$ c'est à dire $x \in \ker(u^{m+1})$. On a prouvé que $\ker(u^{m+2}) \subset \ker(u^{m+1})$ et comme l'inclusion réciproque a déjà été prouvée, on a l'égalité et le résultat au rang $m+1$.

4. Recherche des endomorphismes nilpotents de rang $n - 1$.

1.1. On a

$$\text{Im}(w) = v^q(\text{Im}(v^p)) = \text{Im}(v^{p+q})$$

1.2. $w(x) = 0$ équivaut $x \in \text{Im}(v^p)$ et $w(x) = 0$ c'est à dire à $x \in \text{Im}(v^p)$ et $v^q(x) = 0$. On a donc

$$\ker(w) = \text{Im}(v^p) \cap \ker(v^q) \subset \ker(v^q)$$

1.3. D'après le théorème du rang,

$$\dim(\text{Im}(w)) + \dim(\ker(w)) = \dim(\text{Im}(v^p))$$

En utilisant les deux questions précédentes, on a donc

$$\dim(\text{Im}(v^p)) \leq \dim(\ker(v^q)) + \dim(\text{Im}(v^{p+q}))$$

Le théorème du rang donne aussi

$$\dim(\mathrm{Im}(v^p)) = \dim(E) - \dim(\ker(v^p))$$
$$\dim(\mathrm{Im}(v^{p+q})) = \dim(E) - \dim(\ker(v^{p+q}))$$

on obtient donc :

$$\begin{aligned}\dim(\ker(v^{p+q})) &= n - \dim(\mathrm{Im}(v^{p+q})) \\ &\leq n - (\dim(\mathrm{Im}(v^p)) - \dim(\ker(v^q))) \\ &= \dim(\ker(v^p)) + \dim(\ker(v^q))\end{aligned}$$

1.4. On prouve le résultat demandé par récurrence sur i.

- Initialisation : le résultat est vrai pour $i = 1$ car v est de rang $n-1$ et donc $\dim(\ker(v)) = 1 \leq 1$
- Hérédité : soit $i \in [1..n-1]$ tel que $\dim\left(\mathrm{Ker}(v^i)\right) \leq i$. La question précédente avec $q = 1$ donne :

$$\dim(\ker(v^{i+1})) \leq \dim(\ker(v^i)) + \dim(\ker(v))$$

Comme $\dim\left(\ker(v)\right) = 1$ et $\dim\left(\mathrm{Ker}(v^i)\right) \leq i$, on a :

$$\dim(\ker(v^{i+1})) \leq i + 1$$

ce qui prouve le résultat au rang $i+1$.

1.5. Par hypothèse $v^n = 0$ et $\dim(\ker(v^n)) = n$.

Si par l'absurde on suppose qu'il existe un $j \leq n$ tel que $\dim\left(\mathrm{Ker}(v^j)\right) < j$, alors la récurrence précédente donne pour $i \geq j$: $\dim\left(\mathrm{Ker}(v^i)\right) < i$, ce qui est absurde pour $i = n$.

$$\forall i \in [1..n],\ \dim(\ker(v^i)) = i$$

2. Comme $\ker(v^{n-1})$ est de dimension $n-1$, il n'est pas égal à E et $v \neq \theta$.

3. Il existe donc $e \in E$ tel que $v^{n-1}(e) \neq 0$. Montrons que $(e, v(e), \ldots, v^{n-1}(e))$ est libre. Pour cela, on suppose par l'absurde que

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i v^i(e) = 0 \text{ avec } (\alpha_i) \neq (0)$$

La famille étant non nul il existe un plus petit indice p tel que $\alpha_p \neq 0$: $\displaystyle\sum_{i=p}^{n-1} \alpha_i v^i(e) = 0$ .On compose par v^{n-p-1} ..

Tous les termes sont nuls sauf le premier $(n+p-1+i \geq n \Rightarrow v^{n+p-1+i} = \theta$) Il reste $\alpha_p v^{n-1}(e) = 0$, absurde car les deux facteurs sont non nuls.

La famille est libre et possède $n = \dim(E)$ éléments :

$$\boxed{\text{la famille est une base de } E}$$

4. La matrice de v dans cette base est tout simplement J.

5. Si N est nilpotente de rang $n-1$, alors si $N = Mat_B(f)$, f est nilpotente de rang $n-1$ et donc dans une base bien choisie $Mat(f) = J$. donc N et J sont semblables.

Par transistivité si M et N sont nilpotentes de rang $n-1$, M et N sont semblables à J , donc sont toutes les 2 semblables.