CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES 2008 MP
MATHEMATIQUES 2

I. EXEMPLES

1. 1. Le polynôme caractéristique de $M(\alpha)$ est

$$P_{M(\alpha)}(X) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & \alpha \\ 0 & 2-\lambda & -\alpha \\ 1 & 1 & 2-\alpha-\lambda \end{vmatrix}$$

Si on fait $C1 - C2$ on voit que $2-\lambda$ se factorise
Si on fait $L1 + L2$ on voit que $1-\lambda$ se factorise
la trace donne la dernière valeur propre $(2-\alpha)$

$$\boxed{P_{M(\alpha)}(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)((2-\alpha-\lambda)}$$

.

Les racines de $P_{M(\alpha)}$ sont bien les éléments diagonaux de $M(\alpha)$.

$$\boxed{\text{Pour tout } \alpha, \text{ la matrice } M(\alpha) \text{ est une } \textbf{MDP}}$$

2. Si $\alpha \notin \{0,1\}$ les valeurs propres de $M(\alpha)$ sont deux à deux distinctes, $M(\alpha)$ est diagonalisable.
Si $\alpha = 0$, $Sp(M_0) = \{1,2\}$,2 étant double.Mais le sous espace propre E_2 est le plan $x+y=0$ et donc $M(0)$ est diagonalisable.
Si $\alpha = 1$, $Sp(M_0) = \{1,2\}$, 1 étant double . Mais le sous espace propre E_1 est la droite $\begin{cases} -y+z=0 \\ x+y=0 \end{cases}$ et $M(1)$ n'est pas diagonalisable.

$$\boxed{M(\alpha) \text{ est diagonalisable si et seulement si } \alpha \neq 1}$$

2. $P_A(\lambda) = -\lambda\left(\lambda^2+1\right)$ qui n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc :

la matrice A n'est pas à diagonale propre

.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
Si la matrice A est à diagonale propre le déterminant est égal au produit des valeurs propres , donc au produit des termes diagonaux

$$ad - bc = ad$$

donc $b = 0$ ou $c = 0$. Donc A est triangulaire.

Réciproquement toute matrice triangulaire admet comme valeurs propres ses termes diagonaux.

$$\boxed{\mathcal{E}_2 \text{ est donc l'ensemble des matrices triangulaires}}$$

$\phi : A- > b$ est continue de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, donc l'ensemble des matrices triangulaires supérieures qui est l'image réciproque de $\{0\}$ par ϕ est un fermé de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

de même pour l'ensemble des matrices triangulaires inférieures.

$\mathcal{E}_2$ est donc la réunion de deux fermés.

$$\boxed{\mathcal{E}_2 \text{ est donc une partie fermée de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$$

II. TEST DANS LE CAS n=3

4. Pour une **MDP**, le déterminant est égal au produit des valeurs propres donc au produit des termes diagonaux.

$$\boxed{\text{Une } \textbf{MDP} \text{ est inversible si et seulement si ses termes diagonaux sont tous non nuls}}$$

   Il suffit de prendre une matrice triangulaire, non diagonale et inversible:
   $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. A est une **MDP** si et seulement si son polynôme caractéristique est égal à $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda)$ soit :

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda)$$

   En développant par Sarrus on trouve que

$$\forall \lambda : a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - (a_{1,1} - \lambda)a_{2,3}a_{3,2} - (a_{2,2} - \lambda)a_{1,3}a_{3,1} - (a_{3,3} - \lambda)a_{1,2}a_{2,1} = 0$$

   le polynôme est nul si et seulement si ses coefficients sont nuls.
   le terme constant donne :

$$a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{2,2}a_{1,3}a_{3,1} - a_{3,3}a_{1,2}a_{2,1} = 0$$

   soit $\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}$.
   le coefficient de λ donne

$$a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{23}a_{32} = 0$$

$$\boxed{A \text{ est } \textbf{MDP} \text{ si et seulement si } (\det A = a_{11}a_{22}a_{33}) \text{ et } (a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{23}a_{32} = 0)}$$

   remarque : la condition sur les déterminant est évidente et traduit que le déterminant est le produit des valeurs propres , l'autre condition ne me semble pas facile à trouver sans faire le calcul.

6.
   1. `MDP:=A->if (det(A)=A[1,1]*A[2,2]*A[3,3]) and ( A[1,2]*A[2,1]+A[1,3]*A[3,1]+A[2,3]*A[3,2]=0)`
      `then print( 'oui' ) else print ('non' ) ; fi;`
   2. Les matrices à diagonale propre sont A_1, A_3, A_4, A_5, A_6 et A_8
   3. A_1, A_4 et A_8 on des inverses **MDP** pas A_3, A_5 et A_6
      on peut penser que la condition est

$$\boxed{a_{12}a_{21} = a_{13}a_{31} = a_{23}a_{32} = 0}$$

      ce qui est compatible aussi avec le fait que toute matrice triangulaire inversible est **MDP** ainsi que son inverse.

III. EXEMPLES DE MATRICES PAR BLOCS

7. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$.
   Pour avoir des blocs de taille compatibles avec ceux de l'indication qui suit il faut prendre $A \in \mathcal{M}_r((\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_s(\mathbb{R})$
   Alors $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_s \end{pmatrix}$.
   En développant r fois par rapport à la première ligne, on montre que $\det \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det C$
   En développant s fois par rapport à la dernière ligne, on montre que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_s \end{pmatrix} = \det A$.
   On a donc bien:

$$\boxed{\det M = \det A \det C}$$

   remarque : on démontre dans le cas particulier de 2 blocs diagonaux un résultat admis du cours..

8.

1. Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ est une matrice par blocs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors :

$$P_M(\lambda) = \det \begin{pmatrix} A - \lambda I_r & B \\ 0 & C - \lambda I_s \end{pmatrix} = \det(A - \lambda I_r)\det(C - \lambda I_s) = P_A(\lambda)P_C(\lambda)$$

Donc si A et C sont des **MDP** , alors M est **MDP :** Les matrices A et C ayant leurs valeurs propres sur la diagonale les valeurs propres de M sont sur sa diagonale.

On veut ici 13 coefficients non nuls , donc 3 nuls . Il suffit donc prendre A de taille 1×1 (qui est obligatoirement **MDP**)et C de taille 3×3 **MDP** , B ligne quelconque.

seule A_5 (définie à la question 6,) est une **MDP** ayant tous les termes sont non nuls)

On obtient par exemple :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}}$$

2. Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ L'idée du a) n'est plus utilisable (pourquoi faire faire deux fois la même chose) , puisque si A et C sont des **MDP** de taille 2×2 , on sait que A et C on sait que Am et C sont triangulaires. .On va donc chercher à ce que les valeurs propres de A soit sur la diagonale de C et inversement.

Un exemple : $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une symétrie de valeurs propres 1 et -1 , donc $S + 2I_2$ admet les valeurs propres 3 et 1

Posons $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}$.reste à trouver x et y

Or les valeurs propres de C sont 2 double , donc

$$\det(C - \lambda I_2) = \lambda^2 - 4\lambda + 4$$

soit

$$xy = -1$$

Par exemple : , $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

On obtient :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

.

IV. QUELQUES PROPRIETES

9. On note $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Les valeurs propres de A sont les $(a_{i,i})_{i=1}^n$.

Or si $A = PDP^{-1}$ on a $aA + bI_n = P(aD + bI_n)P^{-1}$ donc les valeurs propres de $aA + bI_n$ sont les $(a.ai, i + b)$, qui sont bien les termes diagonaux de $aA + bI_n$,

$aA + bI_n$ est donc une **MDP**

Les termes diagonaux et les valeurs propres d'une matrice et de sa transposée sont les mêmes, $a^tA + bI_n$ est donc une **MDP**

10. Soit $A \in \mathcal{E}_n$.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_p = A + \dfrac{1}{p} I_n$ qui est une **MDP** d'après la question précédente.

A_p est inversible , si et seulement si -$\dfrac{1}{p}$ n'est pas valeur propre de A , ce qui interdit un nombre fini de valeurs pour p .

On pose $P = \begin{cases} 1 \text{ si } \forall p \in \mathbb{N}^* \text{ -}\dfrac{1}{p} \text{ n'est pas valeur propre} \\ \max\left\{p, -\dfrac{1}{p} \text{ valeur propre}\right\} \text{ sinon .} \end{cases}$. $\boxed{(A_p)_{p>P} \text{ est une suite d'éléments de } G_n \text{ qui vers } A}$.

11.

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice réelle symétrique donc elle est diagonalisable et aussi trigonalisable, mais d'après la question 3., elle n'est pas à diagonale propre.

$$\boxed{\text{Une matrice trigonalisable n'est pas nécessairement une } \mathbf{MDP}}$$

2. Par définition, le polynôme caractéristique d'une **MDP** est scindé, une telle matrice est donc trigonalisable.

$$\boxed{\text{Une } \mathbf{MDP} \text{ est trigonalisable}}$$

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
Si A est semblable à une matrice B à diagonale propre, alors les polynômes caractéristiques sont égaux or P_B est scindé, donc P_A est scindé.
Si P_A est scindé, alors A est semblable à une matrice triangulaire supérieure, or toute matrice triangulaire est à diagonale propre donc A est semblable à une **MDP**.

$$\boxed{A \text{ est semblable à une } \mathbf{MDP} \text{ si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé}}$$

.

12. Il suffit d'écrire A comme une somme de deux matrices triangulaires l'une supérieure , l'autre inférieure.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Pour tout $n = 2$ il existe une matrice qui n'est pas à diagonale propre par exemple $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et qui s'écrit comme somme de deux matrices triangulaires donc comme somme de deux **MDP** , donc $\mathcal{E}_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Pour $n > 2$ il suffit de prendre par blocs $\begin{pmatrix} A & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}$

$$\boxed{\mathcal{E}_n \text{ n'est pas un espace vectoriel}}$$

V. MATRICES SYMETRIQUES ET MATRICES ANTISYMETRIQUES

13. $tr({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$.C'est le carré de la norme 2 sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

14.

1. A est une matrice réelle et symétrique donc il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $A = PD^tP$ et ${}^tP = P^{-1}$

$$tr({}^tAA) = tr(PD^tPPD^tP) = tr(PDD^tP) = tr(PD^2\,{}^tP) = tr(D^2)$$

car $PD^{2t}P$ et D^2 sont semblables et ont donc la même trace.
Or $tr({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$ et $tr(D^2) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$, donc

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2}$$

2. Si de plus A est une **MDP**, alors les valeurs propres de A sont les $(a_{i,i})_{i=1}^n$

   Donc $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^n a_{ii}^2$ et donc $\sum_{i=1}^n \sum_{j\neq i} a_{ij}^2 = 0$,. On a une somme nulle de réelles positifs , il sont tous nuls et la matrice A est diagonale.

   Réciproquement, toute matrice diagonale est à diagonale propre.

$$\boxed{\text{Les matrices symétriques réelles à diagonale propre sont les matrices diagonales}}$$

15. .

1. A est antisymétrique, donc tous ses éléments diagonaux sont nuls et comme elle est à diagonale propre, son polynôme caractéristique est scindé et toutes ses valeurs propres sont nulles.

   A est donc semblable à une matrice diagonale n'ayant que des 0 sur la diagonale .

   Donc si $A = Mat_{(b_i)}(f)$ on a $\left\{\begin{array}{l} \forall i < n \ , \ f(b_i) \in \mathrm{Vect}(b_k)_{k=1}^{i-1} \\ f(b_n) = \overrightarrow{0} \end{array}\right.$ et par une récurrence rapide $\left\{\begin{array}{l} \forall i < n-j \ , \ f^j(b_i) \in \mathrm{Vect}(b_k) \\ \forall i \geq n-j \ , \ f^j(b_i) = \overrightarrow{0} \end{array}\right.$

   et donc $f^n = \widetilde{0}$ soit $A = 0$

   A étant antisymétrique :

$$({}^tAA)^n = (-AA)^n = (-1)^n A^{2n} = 0$$

2. ${}^tAA$ est une matrice symétrique réelle donc elle est diagonalisable.

   $({}^tAA)^n = 0$ donc toutes les valeurs propres de ${}^tAA$ sont nulles.

   On en déduit ${}^tAA = 0$.

3. De ce qui précède, on déduit que $tr({}^tAA) = 0$ donc $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = 0$ et donc somme de termes positifs ...

$$\boxed{A \text{ est la matrice nulle}}$$

VI. DIMENSION MAXIMALE D'UN ESPACE VECTORIEL INCLUS DANS $\mathcal{E}_n$

16.

$$\boxed{\dim \mathcal{A}_n = \frac{n(n-1)}{2}}$$

17. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que l'on ait $F \subset \mathcal{E}_n$.

    De la question 15., on déduit $F \cap \mathcal{A}_n = \{0\}$ et donc la somme $F + \mathcal{A}_n$ est direct.

    Donc $\dim F + \dim \mathcal{A}_n = \dim(F + \mathcal{A}_n) \leq \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2$

    On en déduit $\dim F \leq n^2 - \dim \mathcal{A}_n = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\boxed{\dim F \leq \frac{n(n+1)}{2}}$$

    Le sous-espace des matrices triangulaires supérieures est de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ et il est inclus dans $\mathcal{E}_n$.

    La dimension maximale d'un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $F \subset \mathcal{E}_n$ est donc $\frac{n(n+1)}{2}$.

18. Il n'existe pas de tel sous espace vectoriel si $n = 2$ puis que toute **MDP** est triangulaire.

    pour $n \geq 3$ On utilise des matrices par blocs $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$. On impose à A et C d'être triangulaires inférieures . A et C sont alors bien des **MDP**, donc aussi M d'après la partie III.

    Si B est non nul et si A ou C n'est pas diagonale M n'est pas triangulaire.

    Enfin l'ensemble des matrices de ce type est un espace vectoriel et comme

$$\left\{\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}, A \in TINF_r, B \in \mathcal{M}_{r,n-r}, C \in TINF_{n-r}\right\}$$
$$= \left\{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A \in TINF_r\right\} \oplus \left\{\begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B \in \mathcal{M}_{r,n-r},\right\} \oplus \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} C \in TINF_{n-r}\right\}$$

la dimension est $\dfrac{r(r+1)}{2}+r(n-r)+\dfrac{(n-r)(n-r+1)}{2}=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Si $n=4$ et $r=2$ on prend les matrices du type :

$$\begin{matrix} a & 0 & x & y \\ b & c & z & t \\ 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & B & C \end{matrix}$$

ou si $n=4$ et $r=1$:

$$\begin{pmatrix} a & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & B & C & 0 \\ 0 & D & E & F \end{pmatrix}$$