CENTRALE 2008
PC Math 2

Comme on a des suites de matrices X_n, j'utilise la notation Maple $X_n[i]$ pour noter le coefficient de la ligne i de X_n .

Préliminaire

On vérifie sans problème que :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

La matrice M est inversible ($e \neq 0$) et donc

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

Partie I

A:Récurrences linéaires d'ordre 2:

I.A.1) On a $X_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ -a_0x_n - a_1x_{n+1} \end{pmatrix}$ et donc : $\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}}$

I.A.2) On calcule le polynôme caractéristique

$$\left|\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1-\lambda \end{pmatrix}\right| = \lambda(a_1+\lambda) + a_0 = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

I.A.3) On cherche **toutes les matrices** Q inversibles telles que $A = QDQ^{-1}$. Les colonnes de Q sont les vecteurs propres de A :

$$\begin{cases} -\lambda_i x + y = 0 \\ -a_0x + (-a_1-\lambda_i)y = 0 \end{cases}$$

la première ligne donne $y = \lambda_i x$ et la seconde est alors vérifiée pour tout x d'après **I.A.2** . Le déterminant de la matrice vaut alors $(\lambda_2 - \lambda_1)\,x_1x_2$, ce qui impose la condition $x_1x_2 \neq 0$

$$\boxed{\exists\,(x_1,x_2) \in (\mathbb{C}^*)^2 \ ,\ Q = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ \lambda_1x_1 & \lambda_2x_2 \end{pmatrix}}$$

Une classique vérification par récurrence donne alors :

$$\boxed{A^n = Q.\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}.Q^{-1}}$$

I.A.4) Si A admet une seuile valeur propre λ elle est double , donc racine double du polynôme caractéristique et donc (somme et produit des racines):

$$\boxed{a_0 = \lambda_2 \text{ et } a_1 = -2\lambda}$$

On cherche Q inversible telle que $A = QTQ^{-1}$. La première colonne de Q est un vecteur propre donc du type $V_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \lambda x_1 \end{pmatrix}$ avec $x_1 \neq 0$ (idem **I.A.3)**)

La deuxième colonne V_2 vérifie $AV_2 = \lambda V_2 + V_1$. donc $\begin{cases} -\lambda x + y = x_1 \\ -a_0x + (-a_1-\lambda)y = \lambda x_1 \end{cases}$. La première ligne donne $y = x_1 + \lambda x$. Si on reporte dans la seconde c'est bien vérifié car $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ et $a_1 = -2\lambda$. $Q = \begin{pmatrix} x_1 & x \\ \lambda x_1 & x_1+\lambda x \end{pmatrix}$ de déterminant $x_1^2 \neq 0$

$$\boxed{\exists\,(x_1,x_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \ ,\ Q = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ \lambda x_1 & x_1+\lambda x_2 \end{pmatrix}}$$

On a $T = D + N$ avec $D = \lambda I_2$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On vérifie $DN = ND$ et $N^2 = 0$

$$T^n = D^n + nD^{n-1}N = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

donc :

$$\boxed{A^n = Q.\begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.Q^{-1}}$$

I.A.5) Comme le corps de base est $\mathbb{C}$, A admet 2 valeurs propres (avec multiplicité) . Il n'y a bien que 2 cas possibles :

- A admet deux valeurs propres distinctes. elles sont donc simples et A est diagonalisables.
- A admet une valeur propre double λ . Mais alors si A est diagonalisable A est semblable à λI_2 et $A = P(\lambda I_2)P^{-1} = \lambda I_2$. Absurde à cause du 1 sur la première ligne.

I.A.6)
exemple 1 : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ de valeurs propres 1 et 2 . On peut donc prendre $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, Le préliminaire donne $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et donc

$$A^n = QT^nQ^{-1} = \begin{pmatrix} 2-2^n & 2^n-1 \\ 2-2^{n+1} & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}$$

On a donc

$$X_n = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2-2^n)x_0 + (2^n-1)x_1 \\ (2-2^{n+1})x_0 + \left(2^{n+1}-1\right)x_1 \end{pmatrix}$$

et donc :

$$\boxed{x_n = (2-2^n)x_0 + (2^n-1)x_1}$$

vérifications : x_0, x_1 et la deuxième ligne de X_n sont cohérentes.
exemple 2 : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$ de valeur propres 2 double. On peut donc prendre $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, Le préliminaire donne $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ et **A.I.4) :**donne $T^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ **.** Donc

$$A^n = QT^nQ^{-1} = \begin{pmatrix} -(n-1)2^n & n2^{n-1} \\ -n2^{n+1} & (n+1)2^n \end{pmatrix}$$

On a donc

$$X_n = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(n-1)2^n x_0 + n2^{n-1}x_1 \\ -n2^{n+1}x_0 + (n+1)2^{n+1}x_1 \end{pmatrix}$$

et donc :

$$\boxed{x_n = -(n-1)2^n x_0 + n2^{n-1}x_1}$$

B:Vers un ordre supérieur

I.B.1) Par la règle de Sarrus

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -\lambda - a_2 \end{vmatrix} = \lambda^2(-a_2 - \lambda) - a_0 - a_1\lambda = -P(\lambda)$$

I.B.2) ϕ est linéaire : Si (u_n) et (v_n) sont deux suites et λ un scalaire

$$\phi\left((u_n) + \lambda(v)_n\right) = \left(\begin{pmatrix} u_n + \lambda v_n \\ u_{n+1} + \lambda v_{n+1} \\ u_{n+2} + \lambda v_{n+2} \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}\right) + \lambda\left(\begin{pmatrix} v_n \\ v_{n+1} \\ v_{n+2} \end{pmatrix}\right) = \phi((u_n)) + \lambda\phi((v_n))$$

ϕ est bien linéaire.
Si $\phi((u_n))$ est la suite de matrices nulles on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = 0$ donc $(u_n) = (0)$
On prend la suite de matrices : $\forall n \in \mathbb{N}$ $X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si $(X_n) \in \operatorname{Im}(\phi)$ on a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix}$ donc $x_{n+1} = 0$, mais aussi par translation d'indice $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ x_{n+3} \end{pmatrix}$ donc $x_{n+1} = 1$. ABSURDE
remarque : pour construire le contre exemple prendre n'importe quelle suite telle que la seconde coordonnée de X_n ne sont pas la première de X_{n+1}

$$\boxed{\phi \text{ est linéaire injective non surjective.}}$$

I.B.3) On vérifie que :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ x_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ -a_2x_{n+2} - a_1x_{n+1} - a_0x_n \end{pmatrix} = AX_n$$

et donc (suite géométrique) $X_n = A^n X_0$
Réciproquement soit X_n vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
Analyse : si $(X_n) = \phi((u_n))$ alors pour tout n $u_n = X_n[1]$ la première coordonnée de X_n .
Vérification : Soit $(U_n) = \phi((u_n))$, vérifions $(U_n) = (X_n)$ puis $(U_n) \in \mathcal{R}_p$:

- Par construction $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n[1] = U_n[1]$.
- Puis : $\forall n \in \mathbb{N}$: $X_n[2] = X_{n+1}[1]$ (d'après la forme de A) et $U_n[2] = u_{n+1} = U_{n+1}[1]$ donc $X_n[2] = U_n[2]$
- de même $\forall n \in \mathbb{N}$ $X_n[3] = X_{n+2}[1] = U_{n+2}[1] = U_n[3]$
- Enfin $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$ donne $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+3} = -a_0x_n - a_1x_{n+1} - a_2x_{n+2}$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} + a_2u_{n+2} + a_1u_{n+1} + a_0u_n$
  Donc la suite (X_n) est l'image de la suite $(u_n) \in \mathcal{R}_p$

$$\boxed{(X_n) \in \phi(\mathcal{R}_p) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} , X_n = A^n X_0}$$

I.B.4) D'après la question précédente toute suite de $\mathcal{R}_p$ est du type $A^n X_0$. On peut décomposer X_0 dans la base canonique $X_0 = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$. On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N} : X_n = \alpha A^n e_1 + \beta A^n e_2 + \gamma A^n e_3$$

Réciproquement toute suite du type $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y_n = \alpha A^n e_1 + \beta A^n e_2 + \gamma A^n e_3$ vérifie $Y_n = A^n Y_0$
donc

$$(X_n) \in \mathcal{R}_p \Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{C}^3 \ \ (X_n) = \alpha (A^n e_1) + \beta (A^n e_2) + \gamma (A^n e_3)$$

Mais la famille $(A^n e_1), (A^n e_2), (A^n e_3)$ est libre . Si on prend une combinaison linéaire $\alpha (A^n e_1) + \beta (A^n e_2) + \gamma (A^n e_3) = (0)$, le premier terme (pour $n = 0$) impose $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0$. Or la famille (e_1, e_2, e_3) est libre donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$;
On a donc

$$\boxed{\dim(\mathcal{R}_p) = 3}$$

C:Exemples (quasi) numériques

I.C.1)
a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & -3/2 & 2 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique est $-P$ Une fois constater que 1 est racine évidente, on trouve 3 valeurs propres distincts 1 et $\dfrac{1 \pm i}{2}$. A est donc diagonalisable.
b)Si on prend $X_0 = 0$, la suite est constante nulle et converge vers 0 . Ce n'est pas le but de la question.
Si on prend $X_0 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ on a la suite $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 5/4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5/4 \\ 5/4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5/4 \\ 5/4 \\ 9/8 \end{pmatrix}, \cdots$.
Si $L = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ on a comme suite des $\|X_n - L\|_\infty$ la suite $1, 1, 1, 1/2, 1/4, 1/8, \cdots$ On peut conjecturer que la limite est 1 . .
remarque : la réponse dépend de X_0 ;
c) on vérifie que $det(Q) = -1 \neq 0$. Q est donc inversible . Deux produits matriciels vérifient que

$$AQ = QT = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

d) On obtient successivement :

$$T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} , T^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 1/4 & -1/4 \end{pmatrix} , T^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 01 & -1/4 \end{pmatrix}$$

On en déduit

$$T^{4p} = \left(T^4\right)^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1/4)^p & 0 \\ 0 & 01 & (-1/4)^p \end{pmatrix} = (-\frac{1}{4})^p \begin{pmatrix} (-4)^p & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Puis en multipliant par T, T^2, T^3

$$\begin{aligned} T^{4p+1} &= (-\frac{1}{4})^p \begin{pmatrix} (-4)^p & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, T^{4p+2} = (-\frac{1}{4})^p \begin{pmatrix} (-4)^p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \\ T^{4p+3} &= (-\frac{1}{4})^p \begin{pmatrix} (-4)^p & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 1/4 & -1/4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On peut aussi poser un calcul par blocs en remarquant que $T_0 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix}$ *est la matrice d'une similitude directe de rapport* $1/\sqrt{2}$ *et d'angle* $\pi/4$ *et donc* $T_0^n = \frac{1}{2^{n/2}} \begin{pmatrix} \cos(n\pi/4) & -\sin(n\pi/4) \\ \sin(n\pi/4) & \cos(n\pi/4) \end{pmatrix}$ *mais ce n'est pas le plan du sujet.*

e) changement de base classique :

$$X_n = A^n X_0 \Rightarrow X_n = QT^nQ^{-1}X_0 \Rightarrow Y_n = T^n Y_0$$

Or les 4 suites $T^{4p}, T^{4p+1}, T^{4p+2}, T^{4p+3}$ convergent vers la même limite $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc la suite T^n converge vers L , la suite Y_n converge vers LY_0 . Or $X_n = QY_n$ donc X_n converge vers $QLY_0 = QLQ^{-1}X_0$. $x_n = X_n[1]$ la première coordonnée de X_n converge donc aussi.

$$\boxed{\text{Si } P = X^3 - 2X^2 + \frac{3}{2}X - \frac{1}{2} \text{ toute suite de } \mathcal{R}_p \text{ converge.}}$$

A la machine le calcul (non demandé) ne pose pas de gros problème : (x_n) converge vers $x_0 - 2x_1 + 2x_2$

I.C.2)

a) Les racines de P sont 1 et $\dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i\pi/3}$.

b) La matrice A est donc diagonalisable et il existe une matrice Q inversible telle que $A = Qdiag(1, e^{i\pi/3}, e^{-i\pi/3})Q^{-1}$. $A^n = Qdiag(1, e^{ni\pi/3}, e^{-ni\pi/3})Q^{-1}$ est donc de période 6 .

En reprenant la notation $Y_n = Q^{-1}X_n$ on a

$$\begin{aligned} Y_n &= diag(1, e^{ni\pi/3}, e^{-ni\pi/3}).Y_0 = \begin{pmatrix} Y_0[1] \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{in\pi/3} \begin{pmatrix} 0 \\ Y_0[2] \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-in\pi/3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Y_0[3] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Y_0[1] \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ Y_0[2] \\ Y_0[3] \end{pmatrix} + \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ Y_0[2] \\ -Y_0[3] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et donc

$$X_n = Q \begin{pmatrix} Y_0[1] \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) Q \begin{pmatrix} 0 \\ Y_0[2] \\ Y_0[3] \end{pmatrix} + \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) Q \begin{pmatrix} 0 \\ Y_0[2] \\ -Y_0[3] \end{pmatrix}$$

on pose donc $a =$ la première ligne de $Q \begin{pmatrix} Y_0[1] \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, β celle de $Q \begin{pmatrix} 0 \\ Y_0[2] \\ Y_0[3] \end{pmatrix}$, γ celle de $Q \begin{pmatrix} 0 \\ Y_0[2] \\ -Y_0[3] \end{pmatrix}$ et on a bien :

$$\boxed{\exists (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3 \text{ , } x_n = \alpha + \beta \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \gamma \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}$$

I.C.3)

a) On développe $(X - \lambda)(X - \mu)^2 = (X - \lambda)(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = X^3 - (\lambda + 2\mu)X^2 + \left(\mu^2 + 2\lambda\mu\right) - \lambda\mu^2$ et donc

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \lambda v^2 & -\mu^2 - 2\lambda\mu & \lambda + 2\mu \end{pmatrix}$$

b) A est semblable à T donc est diagonalisable si et seulement si T l'est . Or $T-\mu I_3 = \begin{pmatrix} \lambda-\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2 ($\lambda-\mu \neq 0$) et donc le sous espace propre $E_\mu(T) = \mathrm{Ker}(T-\mu I_3)$ est de dimension 1 strictement inférieur à la multiplicité.
A n'est pas diagonalisable

c) Le décomposition $T = D + N$ avec $D = diag(\lambda, \mu, \mu)$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donne comme $DN = ND(= \mu N)$ et $N^2 = 0$

$$T^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 & 0 \\ 0 & \mu^n & n\mu^{n-1} \\ 0 & 0 & \mu^n \end{pmatrix}$$

En posant encore $Y_n = Q^{-1}X_n$ on a $X_n = QY_n$ et $Y_n = T^n Y_0$

- Si pour tout X_0 la suite (X_n) converge vers 0 alors pour tout $Y_0 = Q^{-1}X_0$ la suite Y_n converge vers 0 . En prenant $X_0 = Qe_1$ on trouve que $T^n e_1$ converge vers 0 donc que $\begin{pmatrix} \lambda^n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ converge vers 0 donc $\lambda \in]-1,1[$. De même avec $X_0 = Qe_2$ on trouve $\mu \in]-1,1[$.
  Réciproquement si $\lambda \in]-1,1[$ et $\mu \in]-1,1[$ alors T^n converge vers (0) et donc toute suite $X_n = QT^nQ^{-1}X_0$ converge vers (0)

$$\boxed{\boxed{\forall X_0 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C}) , \lim (X_n) = (0))} \iff \boxed{\lambda \in]-1,1[\text{ et } \mu \in]-1,1[}}$$

- Si pour tout X_0 la suite (X_n) converge alors pour tout $Y_0 = Q^{-1}X_0$ la suite Y_n converge . En prenant $X_0 = Qe_1$ on trouve que $T^n e_1$ converge vers 0 donc que $\begin{pmatrix} \lambda^n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ converge vers 0 donc $\lambda \in]-1,1]$. De même avec $X_0 = Qe_2$ on trouve $\mu \in]-1,1]$ puis avec $X_0 = Qe_3$ impose la convergence de $n\mu^{n-1}$ et donc $\mu ù \in]-1,1[$
  Réciproquement si $\lambda \in]-1,1[$ et $\mu \in]-1,1[$ (X_n) converge vers (0) et si $\lambda = 1, \mu \in]-1,1[$,X_n converge vers $Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}X_0$

$$\boxed{\boxed{\forall X_0 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C}) , X_n) \text{ converge}} \iff \boxed{\lambda \in]-1,1] \text{ et } \mu \in]-1,1[}}$$

PARTIE II

éléments de solutions non rédigés

A : existence et unicité

II.A.1) Par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = P_n X_0$
II.A.2) Si (X_n) est solution alors $(X_n) = (P_n a)$, d'où l'unicité si existence . Mais la suite $(P_n A)$ vérifie les 2 conditions , d'où l'existence et l'unicité.
II.A.3)
a) On a un sous ensemble de $\mathcal{S}(\mathbb{C}^k)$, non vide (contient la suite nulle) , sable par combinaison linéaire (vérification immédiate) , donc un sous espace vectoriel .
b) ψ est linéaire , injective (si $X_0 = 0$, $(X_n) = (P^n X_0) = (0)$) et surjective (si $a \in \mathbb{C}^k$) la suite $(X_n) = (P_n a)$ est un antécédent de a .
ψ est un isomorphisme et conserve donc les dimensions

$$\dim(S) = k$$

B : un exemple

II.B.1) Le calcul des premiers termes laisse penser $P_n = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{n+1} & 0 \\ -h_n & 1 \end{pmatrix}$, que l'on vérifie par récurrence.

II.B.2) D'après **II.A.2)** $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = P^n X_0 = \begin{pmatrix} \dfrac{x_0}{n+1} \\ -x_0 h_n + y_0 \end{pmatrix}$

II.B.3) Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = x_0 \begin{pmatrix} \dfrac{1}{n+1} \\ -h_n \end{pmatrix} + y_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Une base de S est composé des deux suites $\left(\begin{pmatrix} \dfrac{1}{n+1} \\ -h_n \end{pmatrix}\right)$ et $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ qui forment un système libre de bon cardinal.

II.B.4) (h_n) est la suite des sommes partielles d'une série divergente à termes positifs et diverge donc vers $+\infty$.La suite (X_n) converge si et seulement si $x_0 = 0$ au quel cas elle est constante.

C: condition initiale au temps n_0

II.C.1) Dans ce cas pour tout $n \in [0, n_0]$, $P_n = A_{n-1}A_{n-2}\cdots A_0$ est inversible comme produit de matrices inversibles.

a) On sait que $X_{n_0} = P_{n_0}X_0$, donc si P_{n_0} est inversible $X_0 = (P_{n_0})^{-1} X_{n_0}$ et donc

$$\forall p \in \mathbb{N} \ , X_{n_0+p} = P_{n_0+p} (P_{n_0})^{-1} X_{n_0} \ , \forall p \in [0, n_0] \ , A_{n-p} = P_{n_0-p} (P_{n_0})^{-1} X_{n_0}$$

b) Si la suite (X_n) on a pour tout n $X_n = P_n (P_{n_0})^{-1} X_{n_0}$, donc au plus une solution , et on vérifie que cette suite convient.

II.C.2)

a) OUI : Si on pose $A_0 = (0)$ non inversible alors $X_1 = (0)$ et $\forall n \geq 1$ $X_n = (0)$. Si on impose $X_{n_0} \neq 0$ il n'y a pas de solution.

b) OUI : même exemple avec $X_{n_0} = (0)$

D: Equation avec second membre

II.D.1)

a)On fait deux récurrences:

- $\forall p \geq 0$, X_{n+p} existe et est unique
- $\forall p \in [0, n_0]$, X_{n-p} existe et est unique . (cette seconde récurrence utilise $X_{n-1} = A_{n-1}^{-1}(X_n - b_n)$ qui existe dès que A_{n-1} est inversible)

b) en maple sous forme récursive :

```
X:=proc(a,n0,b)
 if n=n0 then a
 elif n>n0 then A(n-1)&*X(n-1)+b(n-1)
 else A(n)^(-1)&*(X(n+1)+b(n+1))
fi;
end;
```

II.D.2) On prend une combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i Z_p^i = (0)$, alors d'après les formules du **II.C** d'existence et unicité $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i Z_n^i = P_n (P_p)^{-1} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i Z_p^i = 0$ et donc $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i \left(Z_n^i\right)_{n\in\mathbb{N}} = 0$. Or ces suites sont supposées libres donc $\forall i$, $\lambda_i = 0$ .La famille est libre dans $\mathbb{C}^k$ et de bon cardinal : c'est une base.

II.D.3)

a) Pour tout n fixé la famille $\left(Z_n^1, \cdots Z_{,n}^k\right)$ est une base de $\mathbb{C}^k$ or $Y_n \in \mathbb{C}^k$. donc Y_n se décompose $Y_n = \sum_{i=1}^{k} c_n^i Z_n^i = Z_n \begin{pmatrix} c_n^1 \\ \vdots \\ c_n^k \end{pmatrix}$

b) On veut $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y_{n+1} = A_nY_n + b_n$ soit $\forall n \in \mathbb{N}$, $Z_{n+1}C_{n+1} = A_nZ_nC_n + b_n$. Mais$\forall n \in \mathbb{N}$, $Z_{n+1} = A_nZ_n$ (le vérifier par blocs en utilisant $Z_{n+1}^i = A_nZ_n^i$) donc on veut $\forall n \in \mathbb{N}$, $Z_{n+1}C_{n+1} = Z_{n+1}C_n + b_n$.

Or les colonnes de Z_{n+1} forment par construction une base de $\mathbb{C}^k$ et donc Z_{n+1} est inversible.

$$\forall n \in \mathbb{N}, C_{n+1} = C_n + Z_{n+1}^{-1} b_n$$

E: Un exemple

II.E.1) d'après **II.B.3)** on connaît une base que l'on peut noter $\left(Z_n^1\right) = \left(\begin{pmatrix} \dfrac{1}{n+1} \\ -h_n \end{pmatrix}\right)$et $\left(Z_n^2\right) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et donc $Z_n = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{n+1} & 0 \\ -h_n & 1 \end{pmatrix}$

comme $\det(Z_n) = \dfrac{1}{n+1}$ le préliminaire donne $Z_n^{-1} = (n+1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h_n & \dfrac{1}{n+1} \end{pmatrix}$ et donc $Z_{n+1}^{-1} b_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1}{n+1} \end{pmatrix}$ en simplifiant $h_{n+1} - h_n = \dfrac{1}{n+1}$. On a donc

$$C_{n+1} = C_n + \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1}{n+1} \end{pmatrix}$$

II.E.2) de la relation précédente on déduit par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_n = \begin{pmatrix} n \\ h_n \end{pmatrix} + C_0$.

Or $Y_0 = Z_0 C_0 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1} & 0 \\ -0 & 1 \end{pmatrix} C_0$. Donc $C_0 = Y_0$ donc $C_n = \begin{pmatrix} x_0 + n \\ y_0 + h_n \end{pmatrix}$ et donc $\boxed{Y_n = Z_n C_n = \begin{pmatrix} \dfrac{x_0 + n}{n+1} \\ -x_0(n - 1 + h_n) + y_0 \end{pmatrix}}$