

D'après Centrale Maths II 2008

Notations et définitions

- On désigne la matrice $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ par la notation $\text{diag}(a, b, c)$. Ainsi, $\text{diag}(1, 1, 1)$ est la matrice identité I_3 et $\text{diag}(0, 0, 0)$ est la matrice nulle 0 .
- L'espace vectoriel des matrices 3×3 , noté $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, est muni du produit scalaire usuel :

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(({}^t A) B) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{i,j} b_{i,j}$$

- On note $\| \cdot \|$ la norme associée : $\|A\|^2 = \langle A, A \rangle$.
- On note $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales, $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ l'espace des matrices symétriques, et $\mathcal{S}_3^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, c'est-à-dire des matrices symétriques dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles.
- Si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et P est une partie non vide de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, la distance de A à P est, par définition :

$$d(A, P) = \inf_{B \in P} \|A - B\|$$

- Si P et Q sont deux parties non vides de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, la distance entre P et Q est :

$$d(P, Q) = \inf_{A \in P, B \in Q} \|A - B\|$$

On a aussi (et on l'admettra) $d(P, Q) = \inf_{A \in P} d(A, Q)$.

Partie I - Généralités sur les distances

I.A I.A.1) Si $A \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$, calculer $\|A\|$.

I.A.2) En déduire la distance $d(0, \mathcal{O}_3(\mathbb{R}))$

I.A.3) Calculer $d(I_3, \mathcal{O}_3(\mathbb{R}))$

I.B - Démontrer que $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ est une partie bornée. En déduire que $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

I.C - Démontrer que l'application $M \mapsto \|M\|$, de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R} , est continue.

I.D - Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer qu'il existe $U \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ tel que $d(A, \mathcal{O}_3(\mathbb{R})) = \|A - U\|$.

I.E - Soit Φ l'application de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R} définie par $\Phi(M) = d(M, \mathcal{O}_3(\mathbb{R}))$.

I.E.1) Soient $M, N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que :

$$\forall U \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}) \quad d(M, \mathcal{O}_3(\mathbb{R})) \leq \|N - U\| + \|N - M\|$$

puis que :

$$d(M, \mathcal{O}_3(\mathbb{R})) \leq d(N, \mathcal{O}_3(\mathbb{R})) + \|N - M\|$$

I.E.2) En déduire que Φ est continue.

I.F - Soit P un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note p la projection orthogonale sur P et θ l'application de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R} définie par $\theta(M) = \|M - P(M)\|$

I.F.1) Montrer que θ est continue.

I.F.2) Montrer qu'il existe $U \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $\|U - P(U)\| = \min(\|M - P(M)\|, M \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R}))$

I.F.3) Montrer que alors $\|U - P(U)\| = d(P, \mathcal{O}_3(\mathbb{R}))$

I.F.4) Montrer que $d(P, \mathcal{O}_3(\mathbb{R})) \leq \sqrt{3}$

Partie II - Décomposition polaire

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

II.A - Démontrer que ${}^t M M$ est symétrique à valeurs propres positives.

II.B - Démontrer qu'il existe $S \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ symétrique à valeurs propres positives telle que ${}^tMM = S^2$.

II.C - Démontrer que si M est inversible, il existe $U \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ telle que $M = US$.

On admettra que le résultat reste vrai si M est non inversible, c'est-à-dire : « si $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, il existe $U \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_3^+(\mathbb{R})$ telles que $M = US$ (décomposition polaire) ».

II.D - Étude d'un exemple

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer une base orthonormale de vecteurs propres de tMM .

En appliquant la méthode ci-dessus, déterminer $U \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_3^+(\mathbb{R})$ telles que $M = US$.

Partie III - Distance à $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$

III.A -

III.A.1) Soient $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $U \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$. Démontrer que $\|UA\| = \|AU\| = \|A\|$.

En déduire que, pour tout $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, il existe une matrice D diagonale à coefficients positifs telle que :

$$d(A, \mathcal{O}_3(\mathbb{R})) = d(D, \mathcal{O}_3(\mathbb{R}))$$

III.A.2) En déduire que si \mathcal{V} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, il existe \mathcal{W} sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant :

- $\dim \mathcal{W} = \dim \mathcal{V}$;
- $d(\mathcal{W}, \mathcal{O}_3(\mathbb{R})) = d(\mathcal{V}, \mathcal{O}_3(\mathbb{R}))$;
- Il existe $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathcal{W}$, où les λ_i sont dans \mathbb{R}^+ , telle que $d(\mathcal{W}, \mathcal{O}_3(\mathbb{R})) = d(D, \mathcal{O}_3(\mathbb{R}))$.

III.B - Soit $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ où les λ_i sont dans \mathbb{R}^+ .

III.B.1) Si $U \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$, montrer que $\|D - U\|^2 = \left(\sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \right) - 2\langle U, D \rangle + 3$.

III.B.2) Si $U \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$, montrer que $\langle U, D \rangle \leq \sum_{i=1}^3 \lambda_i$.

III.B.3) En déduire que $d(D, \mathcal{O}_3(\mathbb{R})) = \|D - I_3\|$.

III.C - Étude d'un exemple

Pour la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ définie dans la question **II.D.**, calculer la distance $d(M, \mathcal{O}_3(\mathbb{R}))$.

Partie IV - Cas d'un sous-espace de dimension 6

IV.A - Dans cette question seulement, $\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ e & f & 0 \end{pmatrix}, (a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6 \right\}$.

IV.A.1) Soit $A \in \mathcal{V}$. En considérant les valeurs propres de tAA , démontrer l'inégalité :

$$d(\mathcal{V}, \mathcal{O}_3(\mathbb{R})) \geq 1$$

IV.A.2) Calculer $d(I_3, \mathcal{V})$ puis en déduire la valeur de $d(\mathcal{V}, \mathcal{O}_3(\mathbb{R}))$.

Dans toute la suite du problème, \mathcal{V} désigne un sous-espace vectoriel de dimension 6 quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On se propose de démontrer que $d(\mathcal{V}, \mathcal{O}_3(\mathbb{R})) \leq 1$.

À l'aide de la partie III, on se ramène au cas où $d(\mathcal{V}, \mathcal{O}_3(\mathbb{R})) = \|D - I_3\|$ avec $D = \text{diag}(x, y, z) \in \mathcal{V}$ et $x, y, z \in \mathbb{R}^+$. On suppose $D \neq I_3$, sinon $d(\mathcal{V}, \mathcal{O}_3(\mathbb{R})) = 0$ et l'inégalité est vraie.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on note

$$R_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t & 0 & -\sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix} \text{ et } R_3(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

IV.B - Comparer $(D - I_3)^\perp$ et \mathcal{V} .

IV.C - Vérifier que $(R'_1(0), R'_2(0), R'_3(0))$ est une famille libre formée de matrices orthogonales à $I_3 - D$.
Démontrer qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $aR'_1(0) + bR'_2(0) + cR'_3(0) \in \mathcal{V}$.

a, b, c sont ainsi fixés pour la suite, et on pose $f : t \in \mathbb{R} \mapsto R_1(at)R_2(bt)R_3(ct)$.

IV.D - Démontrer que f a un développement limité du type : $f(t) = I_3 + tA + t^2(B + C) + t^2\epsilon(t)$ avec $\epsilon(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$ où $A, B, C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifient :

- $A \in \mathcal{V}$;
- B orthogonale à $I_3 - D$;
- $C = \frac{1}{2} \text{diag}(-a^2 - b^2, -a^2 - c^2, -b^2 - c^2)$.

Dans la suite, ϵ est la fonction apparaissant dans ce développement limité de f .

IV.E - Justifier que : $\|I_3 + t^2(B + C + \epsilon(t)) - D\| \geq \|I_3 - D\|$.

IV.F - Établir que : $\|I_3 + t^2(B + C + \epsilon(t)) - D\|^2 = \|I_3 - D\|^2 + 2t^2\langle I_3 - D, C \rangle + t^2\epsilon_2(t)$ avec $\epsilon_2(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$.
Qu'en déduire sur $\langle I_3 - D, C \rangle$?

IV.G - Démontrer que l'un au moins des trois réels $2 - x - y$, $2 - y - z$, $2 - x - z$ est négatif ou nul.
On suppose pour la suite, ce qui ne change rien, que $2 - x - y \leq 0$.

IV.H - Démontrer que $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z$.

IV.I - Identifier géométriquement les ensembles suivants :

- $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z\}$;
- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y = 2\}$;
- $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y \geq 2\}$.

Justifier que $E \cap F$ est un cercle dont on donnera le rayon.

Quel est le diamètre de $E \cap G$ (c'est-à-dire la distance maximum entre deux de ses points) ?

IV.J - Démontrer que $d(\mathcal{V}, \mathcal{O}_3(\mathbb{R})) \leq 1$.