E4A PSI 2005 , EPREUVE B

Exercice 1.

PARTIE A

1. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \frac{1}{n+1}+\ln(n)-\ln(n+1)=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

On a donc

$$\boxed{u_{n+1}-u_n \sim \frac{-1}{2n^2}}$$

Par équivalent du terme général au terme général négatif d'une série convergente la série $\sum (u_{n+1}-u_n)$ converge et donc

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}$$

2. h_x est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\forall t>0,\ h_x'(t)=\frac{1-x\ln(t)}{t^{x+1}}$$

On en déduit les variations $\left\{\begin{array}{l} \text{si } t\in]0,\exp(1/x)]\ ,\ h_x \text{ croit} \\ \text{si } t\in[\exp(1/x),+\infty[\ ,\ h_x \text{ décroît}\end{array}\right.$

3. h_1 est décroissante sur $[e,+\infty[$ et donc sur $[3,+\infty[$. Ainsi,

$$\forall n\geq 3,\ \forall t\in[n,n+1],\ \frac{\ln(t)}{t}\leq\frac{\ln(n)}{n}$$

$$\forall n\geq 4,\ \forall t\in[n-1,n],\ \frac{\ln(n)}{n}\leq\frac{\ln(t)}{t}$$

En intégrant ces inégalités respectivement sur $[n,n+1]$ et $[n-1,n]$, on obtient les inégalités demandées:

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall n\geq 3\ ,\ \int_n^{n+1}\frac{\ln(t)}{t}\leq\frac{\ln n}{n} \\ \forall n\geq 4\ ,\ \int_{n-1}^{n}\frac{\ln(t)}{t}\geq\frac{\ln n}{n}\end{array}}$$

4. On a $\int\frac{\ln(t)}{t}dt=\frac{1}{2}(\ln(t))^2$ pour $t>1$ et donc :

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall n\geq 3\ ,\ \frac{\ln(n+1)^2-\ln(n)^2}{2}\leq\frac{\ln n}{n} \\ \forall n\geq 4\ ,\ \frac{\ln(n)^2-\ln(n-1)^2}{2}\geq\frac{\ln n}{n}\end{array}}$$

5. $(-1)^n\frac{ln(n)}{n}$ est le terme général d'une suite de signe alternée qui, en module, décroît à partir du rang 3 et qui est de limite nulle ($\ln n\ll n$). Par le critère spécial des séries alternées, la série convergente.
mais $\left|(-1)^n\frac{ln(n)}{n}\right|\geq\frac{1}{n}>0$ (si $n\geq 3$) et donc $\sum\frac{\ln(n)}{n}$ diverge.

$$\boxed{\sum (-1)^n\frac{ln(n)}{n} \text{ est semi convergente}}$$

PARTIE B

1.

1. a) On a

$$a_{n+1}-a_n=\frac{\ln(n+1)}{n+1}-\frac{1}{2}\left((\ln(n+1))^2-(\ln(n))^2\right)$$

Par ailleurs,d'après la seconde inégalité de la question $A.4$. (n suppose $n\geq 3$ et on a donc bien $n+1\geq 4$)

$$\forall n\geq 3,\ \frac{1}{2}\left((\ln(n+1))^2-(\ln(n))^2\right)\geq\frac{\ln(n+1)}{n+1}$$

On obtient donc

$$\boxed{\forall n \geq 3,\ a_{n+1} - a_n \leq 0}$$

et la suite (a_n) décroît à partir du rang 3.

b) En utilisant cette fois la première inégalité de $A.4$ et en sommant les inégalités, on a

$$t_n = \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \geq \frac{\ln(2)}{2} + \int_3^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\, dt \geq \frac{\ln(2)}{2} + \int_3^{n} \frac{\ln(t)}{t}\, dt$$

et donc

$$\boxed{\forall n \geq 3,\ a_n \geq \frac{\ln(2)}{2} - \frac{(\ln(3))^2}{2}}$$

La suite $(a_n)_{n\geq 3}$ est donc minorée. Etant décroissante, elle converge.

2. On découpe S_{2n} en deux parties contenant respectivement les indices pairs et impairs.

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\ln(2k+1)}{2k+1}$$

Dans la seconde somme, on ajoute les termes pairs :

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2) + \ln(k)}{k} - t_{2n}$$

En scindant la première somme, on a donc

$$\boxed{S_{2n} = t_n - t_{2n} + \ln(2) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$$

On fait intervenir les suites u_n et a_n :

$$S_{2n} = (u_n + \ln(n))\ln(2) + a_n + \frac{(\ln(n))^2}{2} - a_{2n} - \frac{(\ln(2n))^2}{2}$$

En écrivant que

$$\frac{(\ln(2n))^2}{2} = \frac{(\ln(n) + \ln(2))^2}{2} = \frac{(\ln(n))^2}{2} + \ln(n)\ln(2) + \frac{(\ln(2))^2}{2}$$

on a donc

$$S_{2n} = u_n \ln(2) + (a_n - a_{2n}) - \frac{(\ln(2))^2}{2}$$

3. (S_{2n}) étant une extraite de la suite convergente (S_n) qui converge vers S, on a donc

$$\boxed{S = \gamma \ln(2) - \frac{(\ln(2))^2}{2}}$$

PARTIE C

Le sujet suppose connue l'existence de la fonction de Riemann . La série est bien convergente : série de Riemann avec $x > 1$

1.

a)On a

$$v_n'(x) = -\frac{\ln(n)}{n^x} + \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} = h_x(n+1) - h_x(n)$$

On sait que h_x décroît sur $[e^{1/x}, +\infty[\subset [e, +\infty[$ car $x \geq 1$.

Donc pour $n \geq e$(et donc $n \geq 3$) v_n' est décroissante sur $[1, +\infty[$, de plus v_n est positive donc

$$\forall n \geq 3,\ \forall x \geq 1,\ 0 \leq v_n(x) \leq v_n(1) = \frac{1}{n(n+1)}$$

ce qui assure la convergence normale de la série $\sum v_n$ sur $[1, +\infty[$ car $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ est une série convergente , indépendante de x

$$\boxed{\sum v_n \text{ converge normalement sur } [1, +\infty[}$$

b)Soit $n \geq 1$.

$x \mapsto \frac{1}{n^x} = e^{-x\ln(n)}$ est continue sur $[1, +\infty[$

$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} = \begin{cases} \ln(n+1) - \ln n \text{ si } x = 1 \\ \frac{(n+1)^{1-x}}{1-x} - \frac{n^{1-x}}{1-x} \text{ si } x > 1 \end{cases}$ Il est donc évident que $x \mapsto \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x}$ est continue sur $]1, +\infty[$. Reste à vérifier la continuité en 1^+ :On pose $u = 1 - x$

$$\frac{(n+1)^u}{u} - \frac{n^u}{u} = \frac{e^{u\ln(n+1)} - e^{u\ln n}}{u} = \frac{(1 + u\ln(n+1) + o(u)) - (1 + u\ln n + o(u))}{u} \longrightarrow_{u->0} \ln(n+1) - \ln n$$

d'où la continuité en 1

$$\boxed{\text{pour } n \geq 1 \text{ , } w_n \text{ est continue sur } [1, +\infty[}$$

remarque 5/2 : vous pouvez aussi prouver la continuité de w_n en utilisant le cours sur les intégrales à paramètres.

Si $x \geq 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ décroît sur $[n, n+1]$ et on a donc

$$\frac{1}{(n+1)^x} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \text{ et } \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x}$$

On en déduit immédiatement que

$$\forall x \geq 1, \ \forall n \geq 1, \ w_n(x) \leq v_n(x) \text{ et } w_n(x) \geq 0$$

Ainsi $\forall x \geq 1, \ \forall n \geq 3, \ |w_n(x)| \leq |v_n(x)| \leq \frac{1}{n(n+1)}$et la convergence de $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ entraîne la convergence normale de $\sum w_n$. Comme les w_n sont continues, il en est de même de la somme W.

$$\boxed{W \text{ est continue sur } [1, +\infty[}$$

c)Par relation de Chasles, on a

$$\sum_{k=1}^{n} w_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x} - \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^x} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x} - \left[\frac{(n+1)^{1-x}}{1-x} - \frac{1}{1-x}\right]$$

On fait tendre n vers l'infini, on obtient

$$\boxed{\forall x > 1, \ W(x) = F(x) + \frac{1}{1-x}}$$

Par continuité de W en 1^+, on a donc

$$\lim_{x \to 1^+} \left(F(x) + \frac{1}{1-x}\right) = W(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n)\right)$$

On remarque enfin que,

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n)\right) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \ln(N+1) = u_N + \ln(N) - \ln(N+1) = u_N - \ln\left(\frac{N+1}{N}\right) \longrightarrow_{N \to +\infty} \gamma$$

et on conclut que

$$\boxed{\lim_{x \to 1^+} \left(F(x) + \frac{1}{1-x}\right) = \gamma}$$

2.

a) Soit $x > 0$. La suite $(\phi_n(x))$ est de signe alternée et $(|\phi_n(x)|)$ décroît vers 0. Le critère spécial prouve donc que $\sum \phi_n(x)$ converge.

b) Sur $]1, +\infty[$, les fonctions ϕ_n sont C^1 et la série $\sum \phi_n$ converge simplement . Il reste donc à montrer la convergence normale de la série des dérivées $\sum \phi'_n$ sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $]1, +\infty[$.

Soit donc un tel segment $[a, b]$. On a $\phi'_n(x) = (-1)^n \frac{\ln(n)}{n^x}$ et donc $\left|\phi'_n(x)\right| = \left|\frac{\ln(n)}{n^x}\right| \leq \frac{\ln(n)}{n^a}$ .On a une majoration par une quantité indépendante de x et $\sum \frac{\ln(n)}{n^a}$ converge par comparaison à une série de Riemann : $\frac{\ln(n)}{n^a}$ est positif et $n^{\frac{1+a}{2}} u_n$ admet une limite nulle avec $\frac{1+a}{2} > 1$

La fonction ϕ est donc C^1 sur $]1, +\infty[$ et on peut dériver terme à terme:

on a donc :

$$\forall x>1,\ \phi'(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n\ln(n)}{n^x}$$

On admet que :

$$\boxed{\phi'(1)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\ln(n)}{n}=S}$$

3.

a) Si on calcule $F(x)-\phi(x)$ les termes impairs se simplifient et il reste :

$$F(x)-\phi(x)=2\sum_{\substack{n=1\\ npair}}\frac{1}{n^x}=2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^x}=2^{1-x}F(x)$$

ce qui donne :

$$\boxed{\forall x>1:\ \phi(x)=\left(1-2^{1-x}\right)F(x)}$$

b) Soit $u=x-1$.On a $1-2^{1-x}=1-2^{-u}=1-e^{-u\ln(2)}=u\ln(2)-\frac{u^2(\ln(2))^2}{2}+o(u^2)$
Par ailleurs, la question $B.1.c$ donne

$$F(x)=F(1+u)=\frac{1}{u}+\gamma+o(1)$$

en faisant le produit, on obtient

$$\begin{aligned}\phi(x)&=\left(u\ln(2)-\frac{u^2(\ln(2))^2}{2}+o(u^2)\right)\left(\frac{1}{u}+\gamma+o(1)\right)\\ &=\left(\ln(2)-\frac{u(\ln(2))^2}{2}+o(u)\right)(1+\gamma u+o(u))\\ &=\ln(2)+\left(\gamma\ln(2)-\frac{(\ln(2))^2}{2}\right)u+o(u)\end{aligned}$$

remarquez la troisième ligne qui change de facteur le terme en $\frac{1}{u}$ et qui permet alors de multiplier deux développents limités de même ordre.

Avec la formule de Taylor-Young, et par unicité des DL, on a donc

$$\boxed{S=\phi'(1)=\gamma\ln(2)-\frac{(\ln(2))^2}{2}}$$