CCP PSI1 2007

1. Les suites α et β.

1.1. On a (machine à calculer autorisée)

$$\boxed{\alpha_0 = 1,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = 2,\ \alpha_4 = 9}$$

1.2. On procède par récurrence sur n pour montrer que

$$\forall n \geq 2,\ \alpha_n \in \mathbb{N}^*$$

- vrai pour $n \leq 4$,d'après le calcul précédent.
- Soit $n \geq 2$ tel que $\alpha_n \in \mathbb{N}^*$. On a
$$\alpha_{n+1} = (n+1)\alpha_n + (-1)^{n+1} \in \mathbb{Z}$$
De plus $\alpha_n \geq 1$ donc $\alpha_{n+1} \geq n+1-1 \geq n \geq 2$ et donc $\alpha_{n+1} \in \mathbb{N}^*$ et le résultat est vrai au rang $n+1$.

Comme $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{N}$, on a donc prouvé que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n \in \mathbb{N}}$$

Remarque :dans la récurrence j'ai besoin de $\alpha_n \geq 1$. D'où la récurrence à partir de 2

2.1. On a

$$\boxed{\beta_0 = 1,\ \beta_1 = 0,\ \beta_2 = 1,\ \beta_3 = 2,\ \beta_4 = 9}$$

2.2. Pas de récurrence ici :

$$\beta_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^k n(n-1)\dots(k+1)\right)$$

et β_n est un entier relatif comme somme de tels entiers.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \beta_n \in \mathbb{Z}}$$

2.3. $\beta_{n+1} - (n+1)\beta_n = (n+1)!\left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) = (-1)^{n+1}$

2.4. pour $n \leq 4$ on a constaté que $\beta_n = \alpha_n$, de plus les suites α et β vérifient la même relation de récurrence d'ordre 1. On a donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n = \beta_n}$$

3.1. La série $\sum \frac{(-1)^k}{k!}$ vérifie les hypothèses du critère spécial (signe alterné, décroissance en valeur absolue et convergence vers 0). La série correspondante a donc un reste d'ordre n, ρ_n, du signe de $\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$. On a donc $\rho(n)$qui est positif si n est impair et négatif si n est pair.

3.2. Le critère spécial prouve aussi que le reste est majorée, en valeur absolue, par le premier terme de la série

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |\rho_n| \leq \frac{1}{(n+1)!}$$

c'est à dire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n!|\rho_n| \leq \frac{1}{n+1}$$

L'inégalité est stricte car sinon le reste d'ordre $n+1$ est nul , donc (signe du reste d'une série alternée) le premier terme $\frac{(-1)^{k+2}}{(k+2)!}$ est nul . ABSURDE

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ n!|\rho_n| < \frac{1}{n+1}}$$

3.3. On a $\frac{\beta_n}{n!} + \rho_n = e^{-1}$ et donc

$$\forall n \geq 1,\ |\beta_n - n!e^{-1}| = |-n!\rho_n| < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$$

D'après le dernier rappel du préambule, $\boxed{\beta_n \text{ est l'entier naturel le plus proche de } e^{-1}n!}$.

4.1. Sur $]-1,1[$, on a

$$f(0)=1,\ f'(x)-\frac{x}{1-x}f(x)=0$$

f est donc une fonction solution d'une équation différentielle linéaire homogène , résolue, du premier ordre à coefficients continue. Il existe donc une unique solution vérifiant la condition initiale $f(0)=1$

Comme $\displaystyle\int \frac{xdx}{1-x}=\int\left(\frac{1}{1-x}-1\right)dx=-x-\ln(1-x)+C$, on obtient

$$\forall x\in]-1,1[,\ f(x)=K\exp\left(-x-\ln(1-x)\right)=\frac{Ke^{-x}}{1-x}$$

Comme $f(0)=1$, on en déduit que $c=1$ et donc que

$$\forall x\in]-1,1[,\ f(x)=\frac{e^{-x}}{1-x}$$

4.2. f est C^∞ sur $]-1,1[$, d'après les théorème généraux sur composition et quotient à dénominateur jamais nul.

4.3. On a donc

$$\forall x\in]-1,1[,\ (1-x)f(x)=e^{-x}$$

On dérive $n+1$ fois cette relation par formule de Leibniz on obtient :

$$\forall x\in]-1,1[,\ \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(1-x)^{(k)}f^{(n+1-k)}(x)=(-1)^{n+1}e^{-x}$$

$(1-x)^{(k)}$ étant nul pour $k\geq 2$, ceci devient

$$(1-x)f^{(n+1)}(x)-(n+1)f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}e^{-x}$$

4.4. Donc en prenant $x=0$:

$$f^{(n+1)}(0)=(n+1)f^{(n)}(0)+(-1)^{n+1}$$

Les suites (β_n) et $(f^{(n)}(0))$ ont le même premier terme et vérifient le même relation de récurrence d'ordre 1 : elles sont égales et

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \beta_n=f^{(n)}(0)}$$

2. La suite γ.

1. $\mathcal{S}_1$ possède un unique élément (l'identité) et

$$\boxed{\gamma_1=0}$$

Dans $\mathcal{S}_2$, il y a l'identité et la bijection $<1\to 2, 2\to 1>$. On donc

$$\boxed{\gamma_2=1}$$

2. On a $3!=6$ permutations de $[|1,3|]$
L'identité de $[|1,3|]$ a trois points fixes.
Les bijections $<1\to 2,2\to 1,3\to 3>,<1\to 3,2\to 2,3\to 1>,<1\to 1,2\to 3,3\to 2>$ ont un point fixe.
Les bijections $<1\to 2,2\to 3,3\to 1>,<1\to 3,2\to 1,3\to 2>$ n'ont pas de point fixe et on a donc

$$\boxed{\gamma_3=2}$$

.

3.1. Une permutation a 2 points fixes si et seulement deux éléments sont permutés et deux autres laissés fixes. On choisit (par exemple) les 2 éléments fixes : Il y a $\binom{4}{2}=6$ permutations ayant 2 points fixes.

3.2. Une permutation possède un unique point fixe a si et seulement si τ permute les éléments de $[|1,4|]\setminus\{a\}$ sans points fixes (deux choix possibles d'après l'étude si $n=3$). On a quatre choix pour a, il y a $8=2*4$ permutations ayant un seul point fixe.

3.3. Si une permutation possède trois points fixes le quatrième n'a pas d'image : impossible.

Si une permutation possède 4 points fixes c'est l'identité.

Il y a $4! = 24$ éléments dans $\mathcal{S}_4$. On a donc

$$\gamma_4 = 24 - 6 - 8 - 1 = 9$$

$$\boxed{\gamma_4 = 9}$$

Remarque : Si vous ne trouvez pas 9 , vous n'avez rien compris au problème ou pas lu la suite : II.5.4 : "comparer les suites β et γ" *, Les 4 premiers termes sont égaux ...*

4.1. On a $\mathrm{card}(\mathcal{S}_n) = n!$.

4.2. Une permutation possédant exactement k points fixes est caractérisée par le choix de ces points fixes (k parmi n) et une permutation sans points fixes des $n-k$ restant (γ_{n-k} choix). Ainsi, il y a $\binom{n}{k}\gamma_{n-k}$ permutations ayant k points fixes.

4.3. $\mathcal{S}_n$ est la réunion disjointe des ensembles $T_{n,k}$ des éléments de $\mathcal{S}_n$ ayant exactement k points fixes. En passant au cardinal, on a donc

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \gamma_{n-k}$$

Comme $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, on a donc (avec un changement d'indice)

$$\boxed{n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \gamma_k}$$

5.1. On a bien sûr $\gamma_n \leq n!$ (il y a moins de permutations sans point fixe que de permutations) et donc

$$0 \leq \frac{\gamma_n}{n!}|x|^n \leq |x|^n$$

Si $|x| < 1$ la série $\sum |x^n|$ converge , donc la série $\sum \frac{\gamma_n}{n!}x^n$ converge absolument.

$$\boxed{\sum \frac{\gamma_n}{n!}x^n \text{ converge si } x \in]-1,1[}$$

5.2. Par produit de Cauchy (les séries convergent absolument) on a :

$$\forall x \in]-1,1[,\ h(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \text{ avec } c_k = \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{\gamma_j}{j!}x^j\right)\left(\frac{x^{n-j}}{(n-j)!}\right) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\gamma_j}{j!(n-j)!}x^n = \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\gamma_j x^n = x^n$$

d'après la relation II.4.3

On en déduit que

$$\forall x \in]-1,1[,\ h(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

et donc

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ g(x) = \frac{e^{-x}}{1-x} = f(x)}$$

5.3 On en déduit que

$$\forall x \in]-1,1[,\ g(x) = f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\beta_n}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\gamma_n}{n!}x^n$$

Le théorème admis donne donc que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \beta_n = \gamma_n = f^{(n)}(0)$$

5.4. et 5.5. Par définition $\frac{\beta_n}{n!}$ tend vers e^{-1}, donc si $x = \pm 1$, la suite $\frac{\gamma_n}{n!}x^n$ ne tend pas vers 0 : divergence grossière.

5.6. On a (calcul à la machine)

$$\gamma_8 = \alpha_8 = 14833$$

3. Sur $\delta_n = e^{-1}n! - \beta_n$.

1.1. On a

$$|J_n| \le e \int_0^1 x^n \, dx = \frac{e}{n+1}$$

et, par encadrement,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} J_n = 0}$$

1.2. $\sum v_n$ est une série vérifiant les hypothèses du critère spécial :

- signe alterné et limite nulle .
- En outre

$$|v_n| - |v_{n+1}| = \int_0^1 e^x (x^n - x^{n+1}) \, dx \ge 0$$

car $\forall x \in [0,1], \ e^x(x^n - x^{n+1}) \ge 0$ et les bornes sont dans le bon sens).

$$\boxed{\sum (v_n) \text{ converge}}$$

2.1. C'est l'égalité de Taylor avec reste intégrale appliquée en 0 à la fonction exp C^{n+1} sur $\mathbb{R}$:

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, dt$$

2.2. Pour $x = -1$, on a donc

$$e^{-1} = \frac{\beta_n}{n!} + \frac{1}{n!} \int_0^{-1} (-1-t)^n e^t \, dt$$

Le changement de variable $u = 1 + t$ donne alors

$$\delta_n = n! e^{-1} - \beta_n = e^{-1} v_n$$

3. Comme $\sum (v_n)$ converge, il en est de même de $\sum (\delta_n)$.
On cherche un équivalent de δ_n donc de J_n par intégration par parties :

$$\int_0^1 x^n e^x \, dx = [x^n e^x]_0^1 - n \int_0^1 x^{n-1} e^x \, dx$$

et donc $J_n = e - nJ_{n-1}$. Comme $J_n \to 0$, on a donc $nJ_{n-1} \to e$ et ainsi

$$J_n \sim \frac{e}{n+1} \sim \frac{e}{n}$$

$|v_n| = J_n$ est le terme général d'une série divergente et $\sum (\delta_n)$ n'est donc pas non plus absolument convergente:

$$\boxed{\text{la série } \sum \delta_n \text{ est semi convergente.}}$$

4.1. Avec l'équivalent précédent, on a

$$\frac{|\delta_n|}{n} = e^{-1} \frac{J_n}{n} \sim \frac{1}{n^2}$$

qui est le terme d'une série absolument convergente.

4.2.1 $u : x \mapsto e^x \ln(1-x)$ est continue sur $[0,1[$. On étudie la borne 1:,

$$u(1-t) = e^{1-t} \ln(t) \sim e \ln(t)$$

. Par comparaison au ln, u est intégrable sur $[1/2, 1[$. Elle l'est donc sur $[0,1[$ et l'intégrale A existe.

4.2.2 On a

$$\forall x \in [0,1[, \ -e^x \ln(1-x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^x x^k}{k}$$

- $f_k : x \mapsto \dfrac{e^x x^k}{k}$ est continue sur $[0,1]$ et donc intégrable sur ce segment.
- $\sum(f_k)$ converge simplement sur $[0,1[$ vers $x \mapsto -e^x \ln(1-x)$ qui est continue sur $[0,1[$.
- On a

$$\int_0^1 |f_k(x)|\, dx = \frac{J_k}{k} \sim \frac{e}{k^2}$$

qui est le terme général d'une série convergente.

Le théorème d'intégration termes à termes d'une série s'applique:

$$A = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{e^x x^k}{k}\, dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{J_k}{k}$$

Comme $J_n = e|\delta_n|$, on a donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\delta_k|}{k} = \frac{A}{e}}$$

4.3. $\left|\dfrac{(-1)^n}{n!(n+1)^2}\right| = o(1/n^2)$ est le terme général d'une série absolument convergente.
Le changement de variable $u = 1-x$ donne

$$A = -e\int_0^1 e^{-u}\ln(u)\, du = -e\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-u)^n \ln(u)}{n!}\, du$$

- $g_n : u \mapsto \dfrac{(-u)^n \ln(u)}{n!}$ est une fonction continue sur $]0,1]$ et intégrable sur $]0,1]$ (fonction de référence si $n = 0$, limite nulle en 0 si $n > 0$)
- $\sum(g_n)$ converge simplement sur $]0,1]$ vers $u \mapsto e^{-u}\ln(u)$ qui est continue sur $]0,1]$.
- Une intégration par parties donne, pour $a > 0$,

$$\int_a^1 u^n \ln(u)\, du = \left[\frac{u^{n+1}}{n+1}\ln(u)\right]_a^1 - \frac{1}{n+1}\int_a^1 u^n\, du$$

En faisant tendre a vers 0 et en multipliant par $1/n!$, on obtient

$$\int_0^1 |g_n(u)|\, du = -\int_0^1 \frac{u^n \ln(u)}{n!}\, du = \frac{1}{(n+1)^2 n!}$$

qui est le terme général d'une série convergente.

Le théorème d'intégration termes à termes s'applique:

$$A = -e\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 g_n(u)\, du = e\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2 n!}$$

On a finalement

$$\boxed{\sum_{k\geq 1} \frac{|\delta_k|}{k} = \frac{A}{e} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2 n!}}$$

4.4. $\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2 n!}$ est le terme général d'une série alternée vérifiant les hypothèses du critère spécial. On a donc

$$\left|\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2 n!}\right| \leq \frac{1}{(N+1)^2 N!}$$

Pour $N = 4$, on a $\dfrac{1}{(N+1)^2 N!} = \dfrac{1}{600}$ et donc

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\delta_n|}{n} - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{600} \text{ pour } \frac{p}{q} = \sum_{n=0}^{3} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2 n!} = \frac{229}{288}$$