Concours commun polytechnique
concours DEUG

première partie : Polynômes de Bernoulli

1.

a)

- $B_0 = 1$, donc $B_1 = X + K$ avec K constante.
  et donc $B_2 = \dfrac{X^2}{2} + KX + C$ avec C constante.
  La condition $B_2(0) = B_2(1)$ donne $\dfrac{1}{2} + K + C = C$ donc $K = -1/2$
- Donc $B_2 = \dfrac{X^2}{2} - \dfrac{X}{2} + C$. Et donc $B_3 = \dfrac{X^3}{6} - \dfrac{X^2}{4} + CX + D$. La condition $B_3(0) = B_3(1)$ donne $\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{4} + C = 0$
  soit $C = \dfrac{1}{12}$

$$\boxed{B_1 = X - \frac{1}{2} \ , \ B_2 = \frac{X^2}{2} - \frac{X}{2} + \frac{1}{12}}$$

b)

- On continue :

$$B_3 = \frac{X^3}{6} - \frac{X^2}{4} + \frac{X}{12} + D$$

et donc

$$B_4 = \frac{X^4}{24} - \frac{X^3}{12} + \frac{X^2}{24} + DX + E$$

. et $B_4(0) = B_4(1)$ donne

$$\frac{1}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + D = 0$$

soit $D = 0$

$$\boxed{B_3 = \frac{X^3}{6} - \frac{X^2}{4} + \frac{X}{12}}$$

- et $B_4 = \dfrac{X^4}{24} - \dfrac{X^3}{12} + \dfrac{X^2}{24} + E$ donc

$$B_5 = \frac{X^5}{120} - \frac{X^4}{48} + \frac{X^3}{72} + EX + F$$

et donc

$$\frac{1}{120} - \frac{1}{48} + \frac{1}{72} + E = 0$$

$\mathbb{N}$

$$\boxed{B_4 = \frac{X^4}{24} - \frac{X^3}{12} + \frac{X^2}{24} - \frac{1}{720}}$$

2. Q est une (la) primitive de P d'intégrale nulle sur $[0, 1]$. Ce n'est pas une "condition initiale" du cours. L'existence et l'unicité ne sont pas évidentes.

   a) Soit $P_0 = \displaystyle\int_0^X P(t)dt$ la primitive nulle en 0 de P.Elle existe par continuité de P sur $\mathbb{R}$.

   On cherche donc Q sous la forme $Q = P_0 + C$. La condition $\displaystyle\int_0^1 Q(u)du = 0$ équivaut à $C = -\displaystyle\int_0^1 P_0(u)du = -\int_0^1 \left(\int_0^u P(t)dt\right) du$
   .

   Il existe donc une unique constante C , donc un unique polynôme Q :

$$\boxed{L(P) = \int_0^x P(t)dt - \int_0^1 \left(\int_0^u P(t)dt\right) du}$$

- Comme pour tout (α, β) réels l'application $f \to \displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)dt$ est linéaire, L est linéaire comme composé et combinaison linéaire d'applications linéaires.
- Si $L(P) = Q = 0$ on a $P = 0'$ soit $P = 0$. Le noyau de L est réduit à 0 . <u>L est injective</u>.

- La condition $\int_0^1 Q(t)dt = 0$ montre que L n'est pas surjective . Par exemple il n'existe pas de polynôme P tel que $L(P) = 1$ car $\int_0^1 1dt \neq 0$

On peut même montrer que $\mathrm{Im}(L) = \left\{Q \in \mathbb{R}[X], \int_0^1 Q(t)dt = 0\right\}$ et que l'unique antécédent de $Q \in \left\{Q \in \mathbb{R}[X], \int_0^1 Q(t)dt = 0\right\}$ est Q' .

b) On peut réécrire les conditions (P_1) :de façon équivalente :

$$B_0 = 0 \ , \forall n \in \mathbb{N} \ , \ B'_{n+1} = B_n \ , \ B_{n+2}(0) = B_{n+2}(1)$$

- Si la suite vérifie (P_1) on a pour $n \in \mathbb{N}$, $B'_{n+1} = B_n$ et donc $\int_0^1 B_{n+1}(t)dt = \int_0^1 B'_{n+2}(t)dt = B_{n+2}(1) - B_{n+2}(0) = 0$ et donc $B_{n+1} = L(B_n)$ On a bien
$$B_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N} \ , \ B_{n+1} = L(B_n)$$
- Réciproque: si pour tout n , $B_{n+1} = L(B_n)$ on a $B_{n+1} = B'_n$ et donc $B_{n+2}(1) - B_{n+2}(0) = \int_0^1 B'_{n+2}(t)dt = \int_0^1 B_{n+1}(t)dt = 0$ (par définition de L)

c) Par récurrence : $B_0 = 1$ existe et est unique . Si B_n existe et est unique B_{n+1} existe et est unique d'après la question **2.a)**

On peut vérifier B_3 et B_4

3. On pose $C_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X)$ et on vérifie que la suite (C_n) vérifie la même relation que (B_n)

- $C_0 = 1$
et pour tout n $C_{n+1} = L(C_n)$ car :
- $C'_{n+1}(x) = (-1)^{n+1}\left(-B'_{n+1}(1-x)\right) = (-1)^n B_n(1-x) = C_n(x)$
- $\int_0^1 C_{n+1}(t)dt = \int_0^1 (-1)^n B_{n+1}(1-t)dt = (-1)^n \int_1^0 B_{n+1}(u)\,(-du) = (-1)^n \int_0^1 B_{n+1}(u)du = 0$
par unicité:
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ , \ B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)}$$

4.

a) on reprend les valeurs numériques de la première question :

$$\boxed{b_0(1), b_1 = -\frac{1}{2}, b_2 = \frac{1}{12}, b_3 = 0, b_4 = -\frac{1}{720}}$$

b) D'après la question **3.** pour n impair $Bn(0) = -B_n(1)$. Mais pour $n \geq 2$ $B_n(0) = B_n(1)$. donc comme $b_n = B_n(0)$

$$\boxed{\text{pour } n \geq 2, \text{ impair } b_n = 0}$$

remarque : attention à la cohérence si $n = 3$.

II calcul de $\xi(2)$

5. Comme $k \geq 1$ on a $B_{2k}(0) = B_{2k}(1)$ et donc $g_k(0) = g_k(2\pi^-)$ donc par période $g_k(2\pi) = g_k\left(2\pi^-\right) = g_k\left(2\pi^+\right)$

La fonction g_{2k} est C^1 sur $[0, 2\pi[$, continue en 2π (d'après la remarque précédente) et $g'_{2k}(x) = \frac{1}{2\pi}B'_{2k}(\frac{x}{2\pi}) = \frac{1}{2\pi}B'_{2k-1}\left(\frac{x}{2\pi}\right)$ admet une limite finie en $2\pi^-$; donc par période g_k est continue, 2π périodique et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, donc g_k est égale à la somme de sa série de Fourier.

$$g_k(x) = \frac{a_0(g_k)}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_n(g_k)\cos(nx) + b_n(g_k)\sin(nx)$$

avec :

- $a_0(g_k) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} B_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^1 B_{2k}(t)\,(2\pi dt) = 2\alpha_0(k)$ en posant $x = 2\pi t$, changement de variable C_1 .

- pour $n \geq 1$, $a_n(g_k) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} B_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^1 B_{2k}(t)\cos(2\pi nt)\,(2\pi dt) = \alpha_n(k)$ en posant $x = 2\pi t$, changement de variable C_1
- idem pour $b_n\left(g_k\right)$

6. $\alpha_0(k) = \displaystyle\int_0^1 B_{2k}(t)dt = 0$, d'après la définition de L (on a bien $2k \geq 1$)

7.

a) deux intégrations par parties donnent

$$\begin{aligned}
\alpha_n(1) &= 2\int_0^1 \left(\frac{t^2}{2}-\frac{t}{2}+\frac{1}{12}\right)\cos(2\pi nt)dt \\
&= 2\left(\left[\left(\frac{t^2}{2}-\frac{t}{2}+\frac{1}{12}\right)\frac{\sin(2\pi nt)}{2\pi n}\right]_0^1 - \frac{1}{2\pi n}\int_0^1 (t-1/2)\sin(2\pi nt)dt\right) \\
&= 2\left(-\frac{1}{2\pi n}\int_0^1 (t-1/2)\sin(2\pi nt)dt\right) \\
&= 2\left(\left[\frac{1}{4\pi^2n^2}(t-1/2)\cos(2\pi nt)\right]_0^1\right) - \frac{1}{4\pi^2n^2}\int_0^1 \cos\left(2\pi nt\right)dt \\
&= 2.\frac{1}{4\pi^2n^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{pour } n \geq 1 \text{ , } \alpha_n(1) = \frac{2}{4\pi^2n^2}}$$

b) Et pour $k \geq 2$, on intégre par parties grâce à $B'_{2k} = B_{2k-1}$:

$$\begin{aligned}
\alpha_n(k) &= 2\int_0^1 B_{2k}(t)\cos(2\pi nt)dt \\
&= 2\left(\left[B_{2k}(t)\frac{\sin(2\pi nt)}{2\pi n}\right]_0^1 - \frac{1}{2\pi n}\int_0^1 B_{2k-1}(t)\sin(2\pi nt)dt\right) \\
&= 2\left(-\frac{1}{2\pi n}\int_0^1 B_{2k-1}(t)\sin(2\pi nt)dt\right) \\
&= 2\left(\left[B_{2k-1}(t)\frac{\cos(2\pi nt)}{4\pi^2n^2}\right]_0^1 - \frac{1}{4\pi^2n^2}\int_0^1 B_{2k-2}(t)\cos(2\pi nt)dt\right)
\end{aligned}$$

Mais $2k-1$ est impair plus grand que 3 donc $B_{2k-1}(0) = B_{2k-1}(1) = 0$

$$\boxed{\forall n \geq 1, \forall k \geq 2 \text{ , } \alpha_n(k) = \left(\frac{-1}{4\pi^2n^2}\right)\alpha_n(k-1)}$$

c) A n fixé et k variable on a une suite géométrique

$$\boxed{\forall n \geq 1, \forall k \geq 1 \text{ , } \alpha_n(k) = \frac{(-1)^{k-1}2}{(2\pi n)^{2k}}}$$

8. Comme $2k$ est pair la relation de **I.3** donne $B_n(1-x) = B_n(x)$. On a donc $B_n(1-x)\sin(2\pi(1-x)) = -B_n(x)\sin\left(2\pi x\right)$. Et donc

$$\int_0^{1/2} B_n(1-x)\sin(2\pi(1-x))dx = -\int_0^{1/2} B_n(x)\sin\left(2\pi ns\right)dx$$

le changement de variable $X = 1-x$ donne :

$$\int_{1/2}^1 B_n(x)\sin\left(2\pi nx\right)dx = -\int_0^{1/2} B_n(x)\sin\left(2\pi nx\right)dx$$

et donc :

$$\boxed{\forall n \geq 1, \forall k \geq 1 \text{ , } \beta_n(k) = 0}$$

remarque: on peut aussi montrer la parité et vérifier : $\forall x \in]0, 2\pi[\ g_k(-x) = g_k(x)$ *et étendre à* $x = 0$ ou 2π *puis à* $\mathbb{R}$:
pour $x \in]0, 2\pi[$, $g_k(-x) = g_k(2\pi - x) = B_{2k}\left(1 - \dfrac{x}{2\pi}\right)$ *(car* $2\pi - x \in [0, 2\pi[$ *) . donc* $g_k(-x) = g_k(x)$ *d'après* **Q3**.

9. On a donc pour $k \geq 1$:
$$g_k(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2\pi n)^{2k}} \cos(nx)$$
En prenant $x = 0$ on a
$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^K} = \frac{1}{2}(-4\pi^2)^k b_{2k}}$$
$b_2 = 1/12$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $b_4 = -\dfrac{1}{720}$ donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

III Application au calcul de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p$

10. **a)** Sans problème :$d^\circ(P) \leq p+1 \Rightarrow d^\circ(\Delta(P)) \leq p+1$ et
$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_{p+1}[X], \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda + +\mu Q)(X) = \lambda (P(X+1) - P(X)) + \mu (Q(X+1) - Q(X))$

b) Si $\Delta(P) = 0$, P est de période 1.Donc $P(X) - P(0)$ est un polynôme ayant une infinité de racines (tous les entiers) . il est donc nul
$$\boxed{\mathrm{Ker}(\Delta) = \mathbb{R}_0[X]}$$
c) Comme P est un polynôme de degré $\leq p+1$, $P(X+1) - P(X)$ est aussi de degré $\leq p+1$. Mais les termes de plus haut degré se simplifie donc $\Delta(P) \in \mathbb{R}_p[X]$.
Comme $\mathrm{Ker}(\Delta)$ est une droite, le théorème du rang donne :
$$\dim(\mathrm{Im}(P)) = \dim(\mathbb{R}_{p+1}[X]) - 1 = (p+2) - 1 = p+1 = \dim(\mathbb{R}_p[X])$$
Pour ces deux espaces vectoriels on a inclusion et égalité des dimensions finies, donc égalité des sous espaces vectoriels.
$$\boxed{\mathrm{Im}(\Delta) = \mathbb{R}_p[X]}$$

11. Comme $\dfrac{X^p}{p!} \in \mathbb{R}_p[X]$, $\dfrac{X^p}{p!}$ admet au moins un antécédent par Δ , noté Q . Si Q_p est un autre antécédent $\Delta(Q - Q_p) = 0$ donc $Q - Q_p \in \mathrm{Ker}(\Delta)$. Il existe une constante C telle que $Q_p = Q + C$. La condition $\displaystyle\int_0^1 Q_p(t)dt = 0$ impose $C = -\displaystyle\int_0^1 Q(t)dt$. $\boxed{Q_p \text{ existe et est unique}}$.

12. On vérifie par récurrence que la suite B_{p+1} vérifie la relation précédente

- $\Delta(X - 1/2) = (X + 1/2) - (X - 1/2) = 1 = \dfrac{X^0}{0!}$ et $\displaystyle\int_0^1 (t - 1/2)dt = 0$ donc $B_1 = Q_0$
- Pour $p \geq 1$: Si $B_p = Q_{p-1}$ alors comme $B'_{p+1} = B_p$
$$\Delta(B'_{p+1}) = \Delta(B_p) = \Delta(Q_{p-1}) = \frac{X^{p-1}}{(p-1)!}$$
On en déduit que :
$$(\Delta(B_{p+1}))' = (B_{p+1}(X+1) - B_{p+1}(X))' = B'_{p+1}(X+1) - B'_{p+1}(X) = \Delta(B'_{p+1}) = \frac{X^{p-1}}{(p-1)!}$$
Danger : ne pas aller trop vite : en général si f *est linéaire* $(f(P))' \neq f(P')$ *. Il faut justifier clairement* $(\Delta(B_{p+1}))' = \Delta(B'_{p+1})$
En prenant une primitive $\Delta(B_{p+1}) = B_{p+1}(X+1) - B_{p+1}(X) = \dfrac{X^p}{p!} + Cste.$

Comme $p \geq 1$ on a $p+1 \geq 2$ et donc par définition des polynôme de Bernoulli $B_{p+1}(1) = B_{p+1}(0)$. La valeur de l'expression en 0 donne une constante nulle

$\Delta(B_{p+1}) = \dfrac{X^p}{p!}$, et d'après **I.2.b)** $\displaystyle\int_0^1 B_{p+1}(t)dt = 0$. Donc par unicité $B_{p+1} = Q_p$.

$$\boxed{\Delta(B_{p+1}) = \frac{X^p}{p!}}$$

13. On a donc pour tout entier k : $B_{p+1}(k+1) - B_{p+1}(k) = \dfrac{k^p}{p!}$. Par télescopage

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k^p}{p!} = \sum_{k=0}^{n} B_{p+1}(k+1) - B_{p+1}(k) = B_{p+1}(n+1) - B_{p+1}(0)$$

- Le terme pour $k = 0$ est nul et donc : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p = p!\left(B_{p+1}(n+1) - B_{p+1}(0)\right)}$

14. pour $p = 2$ on a $B_3 = \dfrac{X^3}{6} - \dfrac{X^2}{4} + \dfrac{X}{12}$ donc

$$B_3(n+1) - B_3(0) = \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{(n+1)}{6} = \frac{n+1}{6}\left(2n^2 + 4n + 2 - 3n - 3 + 1\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- pour $p = 3$ on a $B_4 = \dfrac{X^4}{24} - \dfrac{X^3}{12} + \dfrac{X^2}{24} - \dfrac{1}{720}$ et donc

$$\begin{aligned} B_4(n+1) - B_4(0) &= \frac{(n+1)^4}{4} - \frac{(n+1)^3}{2} + \frac{(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2}{4}\left(n^2 + 2n + 1 - 2n - 2 + 1\right) \\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

IV) séries génératrices

15. En distinguant les cas :

- si $n = 0$ $|b_0| = 1 \leq \dfrac{\pi^2}{3}$
- si $n = 1$, $|b_n| = \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{\pi}{6}$
- si $n > 1$ est impair$|b_n| = 0 \leq \dfrac{\pi^2}{3\,(2\pi)^n}$
- si $n \geq 2$ est pair , on pose $n = 2k$. A la question 9 on avait $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{2}(-4\pi^2)^k b_{2k}$ et donc

$$|b_n| = \frac{2}{(2\pi)^n} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}} \leq \frac{2}{(2\pi)^n} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{\pi^2}{3\,(2\pi)^n} \text{ d'après la valeur de } \xi(2)$$

$$\boxed{|b_n| \leq \frac{\pi^2}{3\,(2\pi)^n}}$$

16. Par récurrence sur n :

- $B_0(x) = 1 = b_0$
- $B_1(x) = x - 1/2 = b_0 x + b_1$

- Si pour tout x $B_n(x)=\sum_{k=0}^{n} b_{n-k}\dfrac{x^k}{k!}$ on a $B'_{n+1}(x)=B_n(x)=\sum_{k=0}^{n} b_{n-k}\dfrac{x^k}{k!}$ et donc

$$\begin{aligned}B_{n+1}(x) &= B_{n+1}(0)+\int_0^x \sum_{k=0}^{n} b_{n-k}\frac{t^k}{k!}dt = b_{n+1}+\sum_{k=0}^{n} b_{n-k}\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\\ &= b_{n+1}+\sum_{K=1}^{n+1} b_{(n+1)-K}\frac{x^K}{K!}=\sum_{K=0}^{n+1} b_{(n+1)-K}\frac{x^K}{K!}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ B_n(x)=\sum_{k=0}^{n} b_{n-k}\frac{x^k}{k!}}$$

remarque : on peut aussi justifier que $B_n^{(k)}=B_{n-k}$ *et utiliser la formule de Taylor* $B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{B_n^{(k)}(0)}{k!}x^k$

17.

a) On a d'après la question **15** $|b_n z^n|\le \dfrac{\pi^2}{3}\left(\left|\dfrac{z}{2\pi}\right|\right)^n$. si $|z|<2\pi$ le terme général tend vers 0 . Comme on étudie une série entière $R\ge 2\pi$

b) Si $|z|<2\pi$ les deux séries $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{z^n}{n!}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ convergent absolument. On peut faire un produit de Cauchy $(e^z-1)\,f(z)=\sum_{n=1}^{+\infty} w_n$ avec $w_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{z^k}{k!}b_{n-k}z^{n-k}$ (la première série n'a pas de terme pour $n=0$).Or d'après la question précédente $B_n(1)=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}b_{n-k}$. On a donc $w_n=(B_n(1)-b_n)\,z^n=(B_n(1)-B_n(0))\,z^n$.

- si $n=1$ $B_n(1)-B_n(0)=1$ d'après le calcul de B_1 .
- si $n\ge 2$, $B_n(1)=B_n(0)$ par définition de la suite.

Donc $(e^z-1)\,f(z)=z$

$$\boxed{f(z)=\frac{z}{e^z-1}}$$

18. D'après la question **16** on a un produit de Cauchy :

$$g_x(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} b_{n-k}\frac{x^k}{k!}\right)z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{(xz)^k}{k!}\right)\left(b_{n-k}z^{n-k}\right)\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\beta_{n-k}\right)$$

en posant $\alpha_k=\left(\dfrac{(xz)^k}{k!}\right)$ et $\beta_k=b_{n-z}z^{n-k}$ La série $\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha_k$ est une série entière en $X=xz$ de rayon de convergence infinie. Elle converge absolument pour tout X et sa somme vaut e^{xz}

La série $\sum_{k=0}^{+\infty}\beta_k$ est la série qui définie f . Elle converge absolument si $|z|<2\pi$.

Par produit de Cauchy

$$\boxed{g_x(z)=\frac{ze^{xz}}{e^z-1}}$$

19.

a)

$$2f(z/2)-f(z)=\frac{z}{e^{z/2}-1}-\frac{z}{e^z-1}=z\left(\frac{1}{e^{z/2}-1}-\frac{e^{z/2}}{e^z-1}\right)=z\left(\frac{e^{z/2}+1}{e^z-1}-\frac{e^{z/2}}{e^z-1}\right)=\frac{ze^{z/2}}{e^z-1}=g_{1/2}(z)$$

b) par linéarité des développement en série entière on a donc :

$$2\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\left(\frac{z}{2}\right)^n-\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n=\sum_{n=0}^{+\infty} B_n(1/2)z^n$$

Comme les séries entières ont un rayon de convergence >0 , on peut (par unicité) identifié les coefficients :

$$\boxed{B_n(1/2) = \left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right) b_n}$$