

CONCOURS NATIONAL DEUG

Epreuve spécifique concours Physique

MATHÉMATIQUES

PARTIE II

Durée : 2 heures

Les calculatrices **sont autorisées**.

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Nombres et polynômes de Bernoulli, applications au calcul de $\zeta(2k)$ et $\sum_{k=1}^n k^p$.**Notations**

On pose pour tout réel $x > 1$, $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

$\mathbb{R}[X]$ est la \mathbb{R} -algèbre des polynômes à coefficients réels.

$\mathbb{R}_n[X]$ est le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

Objectifs

Le but du problème est de calculer les valeurs de $\zeta(2k)$ où k est un entier non nul (paragraphe II)

ainsi que les sommes $\sum_{k=1}^n k^p$ où p et n sont des entiers naturels non nuls (paragraphe III).

Pour cela, on utilisera les polynômes et nombres de Bernoulli étudiés dans le paragraphe I.

Les formules à établir au paragraphe I peuvent être utilisées sans démonstration aux paragraphes II et III.

Les paragraphes II et III sont indépendants.

Tournez la page S.V.P.

I – Polynômes et nombres de Bernoulli

On dit qu'une suite (B_n) de $\mathbb{R}[X]$ est une suite de polynômes de Bernoulli si elle vérifie les propriétés suivantes notées (P_1) :

$$\{B_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N} : B'_{n+1} = B_n \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2 : B_n(1) = B_n(0)\} \quad (P_1)$$

1. Soit (B_n) une suite de polynômes de Bernoulli.

a. Montrer que nécessairement $B_1(X) = X - \frac{1}{2}$ et $B_2(X) = \frac{X^2}{2} - \frac{X}{2} + \frac{1}{12}$.

b. Déterminer B_3 et B_4 .

2. Le but de cette question est de montrer qu'il existe une et une seule suite de polynômes qui vérifie les propriétés (P_1) .

a. Si P est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, montrer qu'il existe un et un seul polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$Q' = P \quad \text{et} \quad \int_0^1 Q(t) dt = 0.$$

On note alors L l'application de $\mathbb{R}[X]$ vers $\mathbb{R}[X]$ qui à P associe Q .

b. Montrer qu'une suite de polynômes (B_n) vérifie (P_1) si et seulement si elle vérifie la propriété suivante notée (P_2) :

$$\{B_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, B_{n+1} = L(B_n)\} \quad (P_2)$$

c. En déduire qu'il existe une unique suite de polynômes vérifiant les propriétés (P_1) .

On notera cette suite (B_n) et on l'appellera **la** suite de polynômes de Bernoulli.

3. Déduire de la question 2., que pour tout entier naturel n , $B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$.

4. On pose, pour tout n , $b_n = B_n(0)$; b_n est le $(n+1)$ -ième nombre de Bernoulli.

a. Calculer b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 .

b. Montrer que pour tout entier impair $n \geq 3$, $b_n = 0$.

II – Application au calcul de $\zeta(2k)$

Soit k un entier naturel non nul. On définit l'application g_k de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par :

$$g_k(x) = B_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right) \quad \text{pour} \quad x \in [0, 2\pi[\quad \text{et} \quad g_k \quad \text{est} \quad \text{périodique} \quad \text{de} \quad \text{période} \quad 2\pi.$$

5. Si on pose $\alpha_0(k) = \int_0^1 B_{2k}(t) dt$

$$\text{et pour } n \geq 1, \quad \alpha_n(k) = 2 \int_0^1 B_{2k}(t) \cos(2\pi n t) dt \quad \text{et} \quad \beta_n(k) = 2 \int_0^1 B_{2k}(t) \sin(2\pi n t) dt$$

montrer que pour tout réel x on a : $g_k(x) = \alpha_0(k) + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n(k) \cos(nx) + \beta_n(k) \sin(nx))$.

6. Calculer $\alpha_0(k)$.

7. a. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\alpha_n(1) = \frac{2}{(2\pi n)^2}$.

b. Montrer que pour tout $n \geq 1$ et tout $k \geq 2$, $\alpha_n(k) = \frac{-1}{(2\pi n)^2} \alpha_n(k-1)$.

c. En déduire pour tout $n \geq 1$ et tout $k \geq 2$, la valeur de $\alpha_n(k)$.

8. Montrer sans calcul que pour tout $n \geq 1$ et tout $k \geq 1$, $\beta_n(k) = 0$.

9. a. Déterminer, pour $k \geq 1$, une relation entre $\zeta(2k)$ et b_{2k} .

b. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

III – Application au calcul de $\sum_{k=1}^n k^p$

10. Soit p un entier naturel, on définit l'application Δ de $\mathbb{R}_{p+1}[X]$ vers $\mathbb{R}_{p+1}[X]$ par :

$$\Delta(P) = P(X+1) - P(X).$$

a. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{p+1}[X]$.

b. Déterminer $\text{Ker } \Delta$.

c. Montrer que $\text{Im } \Delta = \mathbb{R}_p[X]$.

11. En déduire que pour tout entier naturel p , il existe un et un seul polynôme Q de $\mathbb{R}_{p+1}[X]$ tel

$$\text{que : } \Delta(Q) = \frac{X^p}{p!} \text{ et } \int_0^1 Q(t) dt = 0.$$

12. Montrer que ce polynôme Q est en fait B_{p+1} .

13. En déduire que pour tout entier $p \geq 1$ et tout entier $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^n k^p = p! (B_{p+1}(n+1) - b_{p+1})$.

14. Calculer $\sum_{k=1}^n k^2$ et $\sum_{k=1}^n k^3$.

Fin de l'énoncé.