Problème 2. CCP-TSI. 2011

On note :

- $\mathbb{R}$: l'ensemble [illegible]
- ln : la fonction logarithme népérien.

Pour tout nombre réel x tel que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ converge (resp. la série $\sum_{n\geq 0}\ln\left(1+e^{-nx}\right)$ converge), on note $\theta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ (resp $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\ln\left(1+e^{-nx}\right)$) la somme de cette série.

Objectifs :

On se propose d'étudier quelques propriétés des fonctions θ et f.
Dans la partie I, on calcule trois valeurs exactes et une valeur approchée de $\theta(n)$ pour quatre entiers naturels n. La partie II est consacrée à une étude de la fonction f ~~en liaison avec $\theta(2)$~~. Dans la partie III, on étudie de façon plus précise la continuité et le caractère C^1 de la fonction θ.

PARTIE I

Quelques valeurs de la fonction θ

I.1/ Calcul de $\theta(1)$.

I.1.1/ Préciser, selon la valeur du nombre réel x, la limite de $\frac{1}{n^x}$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

I.1.2/ Montrer que l'ensemble de définition de la fonction θ est $E=]0\,;+\infty[$.

I.1.3/ Pour tout entier naturel n, on pose $J_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan t)^n\,dt$.

I.1.3.1/ Préciser une primitive de la fonction $t\mapsto\tan t$ et calculer J_1.

I.1.3.2/ Montrer que la suite J_n est convergente et préciser sa limite.

I.1.3.3/ Calculer J_n+J_{n+2} pour tout entier naturel n.

I.1.3.4/ En utilisant le résultat obtenu en I.1.3.3/, établir (par exemple par récurrence), pour tout entier naturel n non nul, la relation : $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k} = J_1 + (-1)^{n+1} J_{2n+1}$.

I.1.3.5/ En déduire la valeur de $\theta(1)$.

I.2/ Une valeur approchée de $\theta(3)$.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^3}$.

I.2.1/ Décrire, en français, un algorithme de calcul de S_n pour n entier naturel non nul donné.

I.2.2/ En utilisant l'algorithme précédent et la calculatrice, donner la valeur décimale approchée par défaut σ de S_{30} à la précision 10^{-4}.

I.2.3/ Montrer que σ est aussi la valeur décimale approchée par défaut de $\theta(3)$ à la précision 10^{-4}.

I.3/ Calcul de $\theta(2)$ et $\theta(4)$.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, 2π-périodique et vérifiant :

$$g(x) = x^2 \text{ pour tout } x \in]-\pi\ ;\ \pi].$$

Pour tout entier naturel n, on pose $\alpha_n = \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx)\,dx$.

I.3.1/ Calculer α_n pour tout entier naturel n.

I.3.2/ Expliciter les coefficients de Fourier réels $a_n(g)$ et $b_n(g)$ de la fonction g.
On rappelle que pour tout entier naturel n :

$$a_n(g) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(nx)\,dx \quad \text{et} \quad b_n(g) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(nx)\,dx.$$

I.3.3/ Justifier la convergence, pour tout x réel, de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$ et expliciter sa somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$ pour tout $x \in]-\pi\ ;\ \pi]$.

I.3.4/ En déduire la valeur de $\theta(2)$.

I.3.5/ Justifier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$ et calculer la valeur de sa somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

I.3.6/ En utilisant le résultat obtenu en I.3.3/, établir la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^3}\sin(nx)$ et expliciter sa somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}\sin(nx)$ pour $x \in]-\pi\ ;\ \pi]$.

I.3.7/ Justifier, pour tout x réel, la convergence de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^4}\cos(nx)$ et calculer sa somme $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}\cos(nx)$ pour $x\in\left]-\pi\ ;\ \pi\right]$ en fonction de x et $\theta(4)$.

I.3.8/ En déduire la valeur de $\theta(4)$.

PARTIE II

Etude d'une fonction

Pour tout entier naturel n et tout nombre réel x, on note $u_n(x)=\ln\left(1+e^{-nx}\right)$.

Pour tout nombre réel x tel que la série $\sum_{n\geq 0}u_n(x)$ converge, on note $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$ la somme de cette série. On se propose d'étudier quelques propriétés de la fonction f ~~en utilisant en particulier~~ $\cancel{\theta(2)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}}$.

II.1/ Montrer que la fonction f est définie sur $\left]0\ ;+\infty\right[$.

On note désormais $\mathcal{E}$ l'image par f de l'intervalle $\left]0\ ;+\infty\right[$.

II.2/ Montrer que la fonction f est continue sur $\left]0\ ;+\infty\right[$.

II.3/ Montrer que la fonction f est strictement monotone sur $\left]0\ ;+\infty\right[$.

II.4/ Justifier l'affirmation : $\mathcal{E}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

II.5/ Montrer que la fonction f admet une limite finie λ (que l'on précisera) en $+\infty$.

II.6. Soit $h(y)=\frac{\ln(1+y)}{y}$ pour tout $y\in\left]0,1\right]$.

II.6.1 Montrer que h se prolonge par continuité en $y=0$

II.6.2 Donner le développement en série entière de $\ln(1+y)$ avec son rayon de convergence

II.6.3 Calculer $\int_0^1 h(y)\,dy$.

. La suite du II introduit une intégrale impropre pour poursuivre l'étude de f

. Le III précise l'étude de θ avec des notions qui ne sont pas toutes au programme de PC

Problème 2. CCP_TSI. 2011

1. Montrer que les trois séries entières $\sum_{n\geq 1} x^n$, $\sum_{n\geq 1} \sqrt{n}\, x^n$ et $\sum_{n\geq 1} n\, x^n$ ont chacune un rayon de convergence égal à 1.

   On pose alors : $\forall x \in]-1,1[,\ f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} x^n,\ g(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}\, x^n,\ h(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} n\, x^n$.

   On sera attentif au fait que les trois sommes ci-dessus sont indexées à partir de $n=1$.

2. Dans cette question, x désigne un élément quelconque de l'intervalle $]-1,1[$.
   Rappeler sans démonstration une expression simple de $f(x)$ et en déduire une expression simple de $h(x)$ en citant précisément le théorème de cours utilisé.

3.
   a. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0,1[$.
   b. Soit x un élément quelconque de l'intervalle $[0,1[$.
      Minorer $g(x)$ et en déduire : $\lim_{x\to 1_-} g(x)=+\infty$.
   c. Donner l'allure de la courbe représentative de la restriction de la fonction g à l'intervalle $[0,1[$.
      On précisera en particulier la tangente à l'origine et la position de la courbe par rapport à cette tangente.

4.
   a. Montrer qu'il existe un unique réel α possédant les deux propriétés suivantes :
      α est élément de l'intervalle $[0,1[$ et $g(\alpha)=2$.
   b. Calculer $h(0,5)$ et en déduire : $\alpha \geq 0,5$.
   c. A l'aide de votre calculatrice, déterminer explicitement le plus petit entier naturel non nul n_0 tel que : $\sum_{n=1}^{n_0} \sqrt{n}\,(0,6)^n \geq 2$.
      Que peut-on en déduire pour α ?

5.
   a. Montrer que : $\forall x \in]-1,1[,\quad (1-x)\, g(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right) x^n$.
   b. En utilisant le critère spécial relatif aux séries alternées, montrer que la série $\sum_{n\geq 1}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)(-1)^n$ est convergente.
   c. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)(-1)^n$ n'est pas absolument convergente et déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right) x^n$.
   d. Montrer enfin que la fonction g possède une limite finie lorsque x tend vers -1 par valeurs supérieures. On citera très précisément le théorème utilisé.