Problème 1
Ecoles de commerce 2010
option BL

1. f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$. Sur $\mathbb{R}^{+*}$, f est continue et décroît strictement de $+\infty$ à $1.f$ est bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $]1,+\infty[$ (théorème de bijection monotone) . De même f est bijective de $\mathbb{R}^{-*}$ sur $]-\infty,-1[$. Comme $]1,+\infty[\cap]-\infty,-1[=\emptyset$

$$\boxed{X = \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}\setminus\{1\}\text{ , et } f \text{ bijective de } \mathbb{R}^* \text{ sur } X}$$

si $x \neq 0$ et $y \neq 1$: $f(x) = y \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} + 1 = y \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} = y - 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{y-1}$

$$\boxed{f^{-1}(y) = \frac{1}{y-1}}$$

2. a)Pour $x \neq 0$

$$\begin{aligned} u(P)(x) &= x^2\left(a\left(1+\frac{1}{x}\right)^2 + b\left(1+\frac{1}{x}\right)+c\right) = a\left(x^2+2x+1\right)+b(x^2+x)+cx^2 \\ &= (a+b+c)\,x^2+(2a+b)x+a \end{aligned}$$

b) Si on veut que $u(P)$ soit un polynôme, la formule précédente doit être vraie aussi si $x = 0$. On pose donc $\boxed{u(P)(0) = a}$

3. Pour $x \neq 0$ on a

$$u(P)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^n \left(1+\frac{1}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}\,(x+1)^k$$

, $\lim\limits_{0}\left(x^{n-k}\right) = \begin{cases} 0 \text{ si } n > k \\ 1 \text{ si } n = k \end{cases}$. Le troisième cas n'et pas possible ici.

$$\boxed{l = \lim_{0}\left(u(P)\right) = a_n}$$

4.
   - Soit $P \in E_n$. Avec ce prolongement par continuité on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $u(P)(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}\,(x+1)^k$. C'est une combinaison linéaire de polynômes de degré $\leq n$. Donc $u(P) \in E_n$.
   - L'application est linéaire car pour tous polynômes P et Q et tout scalaire λ , on a pour $x \neq 0$

$$u\left(\lambda P+Q\right)(x) = \left(\lambda P+Q\right)\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lambda P\left(1+\frac{1}{x}\right) + Q\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lambda u(P)(x)+u(Q)(x)$$

   $u\left(\lambda P+Q\right)$ et $\lambda u(P)+u(Q)$ sont deux polynômes égaux sur un sous ensemble infini de $\mathbb{R}$, donc $u\left(\lambda P+Q\right) = \lambda u(P)+u(Q)$

$$\boxed{u \in \mathcal{L}\left(E_n\right)}$$

5. Les colonnes de M_3 reprèsentent dans la base $\mathcal{B}$:(calcul valable pour $x \neq 0$, et formule vrai en $x = 0$ par prolongement par continuité)

   - $u(1) = x^3.1 = x^3$
   - $u(x) = x^3\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = x^3+x^2$
   - $u\left(x^2\right) = x^3\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2 = x^3+2x+1$
   - $u(x^3) = x^3\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = x^3+3x^2+3x+1$

   ce qui donne bien la matrice du sujet.

Si on fait un Pivot de gauss sur M_3 en mettant les colonnes dans l'ordre $\left(u(x^3),u(x^2),u(x),u(1)\right)$, on obtient une matrice triangulaire aves des termes tous non nuls sur la diagonale. M_3 est inversible.

Pour calculer l'inverse on pose $Y = MX \Leftrightarrow X = M^{-1}Y$

On étudie le système $\left\{\begin{array}{c} x_4 = y_1 \\ x_3 + 3x_4 = y_2 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = y_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = y_4 \end{array}\right.$ ce qui donne :

$$\left\{\begin{array}{c} x_4 = y_1 \\ x_3 = -3y_1 + y_2 \\ x_2 = y_3 - 2\left(y_2 - 3y_1\right) - 3y_1 = 3y_1 - 2y_2 + y_3 \\ x_1 = y_4 - \left(3y_1 - 2y_2 + y_3\right) - \left(-3y_1 + y_2\right) - y_1 = -y_1 + y_2 - y_3 + y_4 \end{array}\right.$$

en remettant les lignes dans le bon ordre on a :

$$\boxed{M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

6. Si $P \in \operatorname{Ker}(u)$, on a pour tout x non nul $P\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 0$. Tous les $1 + \dfrac{1}{x}$ sont racines de P . Ce qui fait une infinité de racines pour le polynôme..C'est le polynôme nul. Le noyau est réduit à 0 donc u est injective.Comme on a un endomorphisme en dimension finie u est bijective.

$$\boxed{u \text{ est un automorphisme de } E_n}$$

7. En retrouvant des calculs précédents on a $u(x^k) = x^n\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^k = Q_k(x)$.(pour $x \neq 0$) . on a donc $Q_k = u(x^k)$.

   Comme l'image d'une base par un automorphisme est une base $(Q_k)_{k=0}^n$ est une base de E_n

8. En continuant le calcul $u(x^{j-1}) = x^{n-j+1}\left(1+x\right)^{j-1} = \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j-1}{k} x^{n+k-j+1}$. Avec les notations du sujet :

$$u\left(P_{j-1}\right) = \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j-1}{k} P_{n+k-j+1}$$

9. Dans la matrice le coefficient ligne i colonne j est la coordonnée de l'image du $j-$ème vecteur de base (donc $u\left(P_{j-1}\right)$) sur le $i-$ème vecteur de base (donc P_{i-1})

   On change d'indice $i - 1 = n + k - j + 1$ donc $k = i + j - n - 2$ et i varie de $n - j + 2$ à $n + 1$

$$u\left(P_{j-1}\right) = \sum_{i=n-j+2}^{n+1} \binom{j-1}{i+j-n-2} P_{i-1}$$

   D'où les coefficients :

$$\boxed{\left(M_n\right)_{i,j} = \left\{\begin{array}{c} 0 \text{ si } i < n - j + 2 \\ \binom{j-1}{i+j-n-2} \text{ si } i \geq n - j + 2 \end{array}\right.}$$

   Remarque : essayons $n = 3$: $m_{i,j} = \left\{\begin{array}{c} 0 \text{ si } i < 5 - j \\ \binom{j-1}{i+j-n-2} \text{ si } i \geq 5 - j \end{array}\right.$. La diagonale de 1 de M_3 correspond à $i + j = 5$. On a bien des coefficients nuls avant cette diagonale donc pour $i + j < 5$.

   La troisième ligne (donc $i = 3$) donne les coefficients non nuls : $\binom{j-1}{j-2}$ donc $\binom{1}{0} = 1$, $\binom{2}{1} = 2$, $\binom{3}{2} = 3$. ça a l'air juste.

10. *remarque : pour $x \neq 1$ le sujet parle de f^{-1} . On peut vérifier la question 1.*

    pour $x \neq 1$: $u(P)(f^{-1}(x)) = \left(f^{-1}(x)\right)^n P\left(f\left(f^{-1}(x)\right)\right) = \left(\dfrac{1}{x-1}\right)^n P(x) = \dfrac{P(x)}{(x-1)^n}$

11. On a donc pour $x \neq 1$, $P(x) = (x-1)^n u(P)\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$. Donc si $Q = u(P)$, $P(x) = (x-1)^n Q\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$.

$$\boxed{u^{-1}(Q) \text{ est le polynôme vérifiant pour } x \neq 1 : u^{-1}(Q)(x) = (x-1)^n Q\left(\frac{1}{x-1}\right)}$$

On recommence comme en question 8 et 9 :

$$\begin{aligned} u^{-1}(P_{j-1}) &= (x-1)^n \frac{1}{(x-1)^{j-1}} = (x-1)^{n-j+1} = \sum_{k=0}^{n-j+1} \binom{n-j+1}{k} x^k (-1)^{n-j+1-k} \\ &= \sum_{i=1}^{n-j+2} (-1)^{n-j-i} \binom{n-j+1}{i-1} P_{i-1} \end{aligned}$$

12.

$$\boxed{\left(M_n^{-1}\right)_{i,j} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \text{ si } i > n-j+2 \\ (-1)^{n-j-i+1} \binom{n-j+1}{i-1} \text{ sinon} \end{array} \right.}$$

remarque : vérification si $n=3$.

13. $\omega_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\omega_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

14.

$$\begin{aligned} u(V_k)(x) &= x^n \left(1+\frac{1}{x}-\omega_1\right)^k \left(1-\frac{1}{x}-\omega_2\right)^{n-k} \\ &= \left((1-\omega_1)\,x+1\right)^k \left((1-\omega_2 x)+1\right)^{n-k} \end{aligned}$$

mais ω_1 et ω_2 sont racines de x^2-x-1 , donc $\omega_1+\omega_2=1$ et $\omega_1\omega_2=-1$ donc

$$\boxed{u\left(V_k\right) = \alpha_k V_k \text{ avec } \alpha_k = \omega_2^k \omega_1^{n-k}}$$

15. On veut comparer $V_k(x) = (x-\omega_1)^k (x-\omega_2)^{n-k}$ et $Q_k(t) = (t+1)^k t^{n-k}$. V_k a les racines ω_1 et ω_2 et Q_k , -1 et 0 . On cherche une application simple telle que $\omega_1 \to -1$, $\omega_2 \to 0$.

On peut prendre une application affine $t = \dfrac{x-\omega_2}{\omega_2-\omega_1}$:

$$Q_k\left(\frac{x-\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\right) = \left(\frac{x-\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\right)^k \left(\frac{x-\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\right)^{n-k} = \frac{V_k(x)}{(\omega_2-\omega_1)}$$

et donc :

$$\boxed{V_k = (\omega_2-\omega_1)^n\, Q_k\left(\frac{x-\omega_2}{\omega_{é}-\omega_1}\right)}$$

La famille a le bon cardinal. C'est une base si et seuleemnt si elle est libre . On suppose donc $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k V_k = 0$ avec $(\lambda_k) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Avec la notation préceénte on en déduit :

$$\forall t \in \mathbb{R} \, , \, \sum_{k=0}^{n} \lambda_k Q_k(0) = 0$$

$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k Q_k$ est donc le polynpome nul . La famille (Q_k) est libre donc les λ_k sont tous nuls.

$$\boxed{(V_k)_{k=0}^n \text{ est une base de } E_n}$$

16. Comme pour tout k $u\left(V_k\right) = \alpha_k V_k$, dans cette base les coefficients diagonaux de la matrice de u sont les α_k et les autres sont nuls.

$$\boxed{Mat_{(V_k)}\left(u\right) = \text{diag}\left(\omega_2^k \omega_1^{n-k}\right)}$$