PC 2 DS 4 du 26/11

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CONCOURS D'ADMISSION DE 2010

Concepteur : ESSEC

OPTION LETTRES ET SCIENCES HUMAINES

Filière B/L

MATHEMATIQUES

Mardi 11 mai de 14h à 18h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

PROBLÈME 1

Notations :

Si p et q sont des entiers, on note $\binom{p}{q} = \begin{cases} \dfrac{p!}{q!(p-q)!} & \text{si } q \text{ est dans } \{0,1,\dots,p\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Pour n entier naturel non nul, on note E_n le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynômes réelles de degré inférieur ou égal à n.
On note, pour k dans $\{0,1,\dots,n\}$, P_k la fonction polynôme définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad P_k(x) = x^k$$

On rappelle que la famille $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ forme une base de E_n.

Les parties III et IV de ce problème sont indépendantes. Les résultats de la partie I sont utilisés en fin de partie III.

Partie I - Un résultat préliminaire

I.1) Montrer que l'application f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^*$ sur une partie X de $\mathbb{R}$ que l'on déterminera. On explicitera $f^{-1}(x)$ pour $x \in X$.

Partie II - Définition d'un endomorphisme

Si P appartient à E_n, on pose, pour x réel non nul, $u(P)(x) = x^n P(1 + \dfrac{1}{x})$.

II.2) *Exemple :* dans cette question seulement, on prend $n = 2$.

a) Pour P dans E_2 défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b et c réels, exprimer, pour x réel non nul, $u(P)(x)$ sous la forme $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ avec α, β et γ réels que l'on exprimera en fonction de a, b et c.

b) Quelle valeur faut-il donner à $u(P)(0)$ pour que $u(P)$ soit dans E_2 ?

On revient au cas général : n est de nouveau un entier naturel non nul quelconque.

II.3) Soit P dans E_n ; on pose $P = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k$.

Ainsi : pour tout x réel, $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ (où $a_0, \ldots, a_n$ sont les coefficients réels de P).

Déterminer la limite, notée ℓ, de $u(P)(x)$ lorsque x tend vers 0. Dans la suite de ce problème, on posera $u(P)(0) = \ell$ et [illegible]

II.4) Montrer que u est un endomorphisme de E_n.

Partie III - Étude de la bijectivité de l'endomorphisme u

On notera M_n la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

III.5) *Exemple :* montrer que $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et justifier que M_3 est inversible en cherchant à déterminer son inverse M_3^{-1} que l'on explicitera.

On revient au cas général (n entier naturel non nul quelconque).

III.6) Déterminer le noyau de u et en déduire que u est bijectif.

III.7) On pose pour x réel et k entier dans $\{0, \ldots, n\}$,

$$Q_k(x) = (x+1)^k x^{n-k}$$

En utilisant la question précédente, justifier que la famille $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ est une base de E_n.

III.8) Exprimer, pour j dans $\{1, 2, \ldots, n+1\}$, $u(P_{j-1})$ à l'aide de $P_{n-j+1}, P_{n-j+2}, \ldots, P_n$.

III.9) En déduire, pour i et j dans $\{1, 2, \ldots, n+1\}$, le coefficient situé sur la ligne i et la colonne j de M_n.

III.10) Déterminer, pour x réel différent de 1 et P dans E_n, $u(P)\big(f^{-1}(x)\big)$.

III.11) En déduire u^{-1}.

III.12) Déterminer, M_n^{-1} (on donnera, pour i et j dans $\{1, 2, \ldots, n+1\}$, le coefficient situé sur la ligne i et la colonne j de M_n^{-1}).

IV Un changement de base

13/ Determiner les racines de $x^2 - x - 1 = 0$

On notera w_1 (w_2) la racine positive (negative) de cette equation

14) Soit pour $k \in \{0..n\}$ le polynôme V_k defini pour x réel par $V_k = (X - w_1)^k (X - w_2)^{n-k}$

Determiner un scalaire α_k tel que $u(V_k) = \alpha_k V_k$

15) Exprimer V_k à l'aide de Q_k (de la question 7) et en deduire que $(V_k)_{k=0}^{n}$ est une base de E_n

16) Donner la matrice de u dans cette base