Dans le problème, le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
Toutes les courbes considérées dans ce problème sont des courbes paramétrées régulières de classe C^2, définies pour $t \in \mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{OM}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}.$$

On rappelle qu'il s'agit de courbes dont les fonctions-composantes x et y sont de classe C^2, et dont la fonction vecteur-dérivé $t \mapsto x'(t)\,\vec{i} + y'(t)\,\vec{j}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
On définit en fonction du paramètre choisi pour l'arc les deux fonctions vectorielles $\vec{T}$ et $\vec{N}$:
- $\vec{T}$ est le vecteur unitaire tangent, de même sens que le vecteur-dérivé de la courbe.
- $\vec{N}$ est le vecteur unitaire normal, directement orthogonal à $\vec{T}$.

On définit en fonction du paramètre choisi pour l'arc la fonction courbure c, et on rappelle qu'on a les deux formules de Serret-Frenet (dans lesquelles les dérivations sont effectuées par rapport à une abscisse curviligne s) :

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = c\,\vec{N} \qquad \text{et} \qquad \frac{d\vec{N}}{ds} = -c\,\vec{T}.$$

Dans la suite, on appelle *sommet d'une courbe régulière de classe* C^3 tout point de celle-ci où la dérivée de la fonction courbure c s'annule. Dans les questions 2 et 3, on compare pour les paraboles et les ellipses la notion usuelle de sommet avec celle définie ici, puis on établit ensuite que toute courbe fermée, sans point double et strictement convexe admet au moins quatre sommets (comme c'est le cas pour l'ellipse par exemple).

1°) *Etude d'une équation différentielle*
On considère une courbe régulière de classe C^2 paramétrée par une abscisse curviligne s et on désigne par $z(s) = x(s) + i\,y(s)$ l'affixe du point $M(s)$, de sorte que $z'(s)$ est l'affixe de $\vec{T}(s)$.
a) On donne une fonction continue $c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Etablir à l'aide des formules de Serret-Frenet que c est la fonction courbure de la courbe si et seulement si : $\forall s \in \mathbb{R},\ z''(s) = i\,c(s)\,z'(s)$.
b) On étudie les courbes dont la courbure c est constante, égale à c_0.
Déterminer l'expression de $z(s)$ en distinguant les deux cas $c_0 = 0$ et $c_0 \neq 0$.
En déduire quelles sont les courbes dont tous les points sont des sommets.
c) On étudie les courbes dont la courbure c est donnée par $c(s) = (1+s^2)^{-1}$ et qui vérifient les deux conditions initiales $z(0) = i$ et $z'(0) = 1$.
Montrer que $z'(s) = \frac{1+is}{\sqrt{1+s^2}}$, en déduire $z(s)$, et reconnaître la courbe en posant $s = \mathrm{sh}(t)$.

2°) *Etude des sommets de la parabole*
Soit la parabole définie par le paramétrage $t \mapsto t\,\vec{i} + \frac{t^2}{2p}\,\vec{j}$ ($p > 0$ donné).
a) Déterminer les vecteurs tangent et normal $\vec{T}(t)$ et $\vec{N}(t)$ au point $M(t)$.
b) Etablir (par exemple à l'aide des formules de Serret-Frenet) que la courbure $c(t)$ en $M(t)$ est égale à $p^2(t^2+p^2)^{-3/2}$.
c) En quel point de la parabole la dérivée de la courbure s'annule-t-elle ?

3°) *Etude des sommets de l'ellipse*
Soit l'ellipse définie par le paramétrage $t \mapsto a\cos(t)\,\vec{i} + b\sin(t)\,\vec{j}$ ($a, b > 0$ donnés, distincts).
a) Déterminer les vecteurs tangent et normal $\vec{T}(t)$ et $\vec{N}(t)$ au point $M(t)$.
b) Déterminer l'expression de la courbure $c(t)$ au point $M(t)$.
c) En quels points de l'ellipse la dérivée de la courbure s'annule-t-elle ?

Dans toute la suite, on suppose que la courbe $s \mapsto \overrightarrow{OM}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j}$ est régulière, de classe C^3, paramétrée par une abscisse curviligne s et qu'elle vérifie les trois hypothèses :

- elle est fermée et de longueur L, ce qui signifie que : la fonction $s \mapsto \overrightarrow{OM}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j}$ est périodique de plus petite période L.
- elle est sans point double, ce qui signifie que : la fonction $s \mapsto \overrightarrow{OM}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j}$ est injective sur $[0, L[$.
- elle est strictement convexe, ce qui signifie que : pour tout réel s_0, l'ensemble des points $M(s)$ où $s \neq s_0 + kL$ avec $k \in \mathbb{Z}$, est contenu dans un des demi-plans ouverts définis par la tangente à la courbe en $M(s_0)$.

4°) *Position d'une telle courbe par rapport à une sécante*

On considère deux réels s_1 et s_2 dans une même période, tels que $s_1 < s_2 < s_1 + L$.
On pose $M_1 = M(s_1)$ et $M_2 = M(s_2)$ et on considère un repère orthonormé dont l'axe OX est la droite $M_1 M_2$ et dans lequel on désigne par $X(s)$ et $Y(s)$ les coordonnées de $M(s)$.

a) On suppose qu'il existe des réels u, v tels que $s_1 < u < v < s_2$ et $Y(u)\,Y(v) \leq 0$.
Montrer qu'il existe un réel w tel que $s_1 < w < s_2$ et $Y(w) = 0$.
En déduire une contradiction avec la stricte convexité de la courbe donnée en considérant la tangente en celui des trois points $M(s_1)$, $M(w)$, $M(s_2)$ situé entre les deux autres.

b) Montrer que tous les points $M(s)$ où $s_1 < s < s_2$ appartiennent à l'un des deux demi-plans ouverts délimités par la droite $M(s_1)\,M(s_2)$, puis que les points $M(s)$ où $s_2 < s < s_1 + L$ appartiennent à l'autre demi-plan ouvert.

5°) *Sommets d'une courbe fermée sans point double et strictement convexe*

a) Etablir que c a un minimum et un maximum dans $[0, L]$, supposés atteints en s_1 et s_2.
(On pourra remarquer que la fonction c est L–périodique et de classe C^1).
En déduire que la courbe a au moins pour sommets $M_1 = M(s_1)$ et $M_2 = M(s_2)$.

b) On suppose que c' (il s'agit de la dérivée de c par rapport à s) ne s'annule qu'en s_1 et s_2 sur la période $[s_1, s_1 + L[$ et on considère à nouveau un repère orthonormé dont l'axe OX est la droite $M_1 M_2$ et dans lequel on désigne par $X(s)$ et $Y(s)$ les coordonnées de $M(s)$.

- En supposant $Y(s) > 0$ pour $s_1 < s < s_2$, déterminer le signe de $c'\,Y$ et en déduire que :
$$\int_{s_1}^{s_1+L} c'(s)\,Y(s)\,ds > 0.$$
- Etablir à l'aide d'une intégration par parties et des formules de Serret-Frenet que :
$$\int_{s_1}^{s_1+L} c'(s)\,Y(s)\,ds = 0.$$
- Déduire de cette contradiction que la courbe a au moins trois sommets M_1, M_3 et M_2.

c) On suppose maintenant que c' ne s'annule qu'en s_1, s_3 et s_2 sur la période $[s_1, s_1 + L[$.
Etablir alors que c' s'annule sans changer de signe en s_3, puis en déduire une contradiction en reprenant le raisonnement précédent.

Ainsi, une courbe fermée sans point double et strictement convexe a au moins 4 sommets.