E4A 2003
exercice 1

Par hypothèse, les a_n (et donc les p_n) sont tous non nuls.

Première partie

1) Toute suite (a_k) de limite $l < 1$ convient

- si $\forall k \in \mathbb{N} \quad a_k = 1/2$, alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad p_n = 1/2^n$.
- si $\forall k \in \mathbb{N} \;\; a_k = \frac{1}{k}$,$\forall n \in \mathbb{N}$ $p_n = \frac{1}{n!}$ convient aussi.

2) Si la suite (p_n) converge vers $p \neq 0$ on peut écrire, les p_n étant non nuls :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n = \frac{p_n}{p_{n-1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{p}{p} = 1$$

$$\boxed{\text{Si } (p_n) \text{ converge vers } p \text{ différent de 0, alors } (a_n) \text{ converge vers 1}}$$

3a) Soit $n > n_0$, on a

$$p_n = \prod_{k=1}^{n_0} a_k \prod_{k=n_0+1}^{n} a_k = p_{n_0} q_n,$$

or $p_{n_0} \neq 0$ donc :

$$\boxed{\forall\ n > n_0,\ q_n = \frac{p_n}{p_{n_0}}}$$

3b) $\ln a_n$ est défini au moins pour $n > n_0$ et $\forall n > n_0 \quad \ln q_n = \sum_{k=n_0+1}^{n} \ln a_n$
Si la série $\sum \ln a_n$ converge alors la suite des sommes partielles $(\ln q_n)$ converge.
Soit l sa limite. Par continuité de la fonction exponentielle, il en résulte que la suite (q_n) converge vers e^l et donc, d'après a), la suite (p_n) converge vers $p = p_{n_0}e^l$. Or cette dernière limite est non nulle, puisque p_{n_0} est non nul et $e^l > 0$.

$$\boxed{\text{Si la série } \sum \ln a_n \text{ converge, alors la suite } (p_n) \text{ converge vers un réel } p \text{ non nul}}$$

3c) Si la suite des sommes partielles de la série $\sum \ln a_n$ diverge vers $+\infty$ alors la suite $(\ln q_n)$ admet pour limite $+\infty$ et donc la suite (q_n) admet pour limite $+\infty$.
Si la suite des sommes partielles de la série $\sum \ln a_n$ diverge vers $-\infty$ alors la suite $(\ln q_n)$ admet pour limite $-\infty$ et donc la suite (q_n) admet pour limite 0 . Par conséquent :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si la suite des sommes partielles de la série } \sum \ln a_n \text{ diverge vers } +\infty\text{, alors } (p_n) \text{ diverge vers } sgn(p_{n_0})\infty \\ \text{si la suite des sommes partielles de la série } \sum \ln a_n \text{ diverge vers } -\infty\text{, alors } (p_n) \text{ converge vers 0}\end{array}}$$

4) Dans cette question $u_n \geq 0$ donc $a_n \geq 1$ $p_n > 0$ et $\ln a_n \geq 0$.On a toujours la relation $\ln(p_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln(a_k)$

- Si (p_n) converge vers $p > 0$. Alors, par continuité de la fonction ln, $(\ln p_n)$ converge vers $\ln p$ et d'après la relation précédente la série $\sum \ln a_n$ converge.

  De plus, (a_n) converge vers 1 d'après la première question et donc (u_n) converge vers 0 ; On a donc $\ln a_n = \ln(1+u_n) \sim u_n$. Les deux séries à termes positifs équivalents sont de même nature .D'où la convergence de $\sum u_n$.
- Si la série $\sum u_n$ converge. Alors la suite (u_n) tend vers 0, donc $\ln a_n \sim u_n$ et $\sum \ln a_n$ converge. donc la suite $(\ln p_n)$ qui est la suite des sommes partielles converge vers un réel l et donc (p_n) converge vers $p = e^l > 0$.

$$\boxed{(p_n) \text{ converge vers } p > 0 \text{ si et seulement si la série } \sum u_n \text{ converge}}$$

5 Si $\sum u_n$ converge, en particulier (u_n) tend vers 0 et donc $\ln(a_n) = \ln(1 + u_n) = u_n + \left(-\frac{u_n^2}{2} + o\left(u_n^2\right)\right) = u_n - v_n$ avec $v_n \sim \frac{u_n^2}{2}$

- **5a)** Si $\sum u_n^2$ converge, alors $\ln a_n$ apparaît comme la somme des termes généraux de deux séries convergentes, donc $\sum \ln a_n$ converge, d'où d'après **3b)**:

$$\boxed{\text{Si } \sum u_n^2 \text{ converge, alors } (p_n) \text{ converge vers } p \neq 0}$$

5b) Si $\sum u_n^2$ diverge, la suite des sommes partielles de $\sum v_n$ diverge vers $+\infty$, donc, puisque $\sum u_n$ converge, la suite des sommes partielles de $\sum \ln a_n$ diverge vers $-\infty$, d'où d'après **3c)** :

$$\boxed{\text{Si } \sum u_n^2 \text{ diverge, alors } (p_n) \text{ converge vers } p = 0}$$

6) Si $\sum u_n$ est absolument convergente, alors en particulier $\sum u_n$ converge et (u_n) converge vers 0, donc $u_n^2 = o(|u_n|)$. Des théorèmes sur la comparaison des séries à termes positifs, on déduit que $\sum u_n^2$ converge. D'après le 5a) :

$$\boxed{\text{Si } \sum u_n \text{ est absolument convergente, alors } (p_n) \text{ converge vers } p \neq 0}$$

Deuxième partie

1a) On a $\ln(a_n) \sim \frac{1}{n}$ donc $\sum \ln a_n$ diverge vers $+\infty$ (série à termes positifs), donc le **I.3c)** s'applique :

$$\boxed{\text{Pour } a_n = 1 + \frac{1}{n},\ (p_n) \text{ diverge vers } +\infty}$$

On peut aussi calculer par récurrence : $p_n = n + 1$

1b) On a $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$, $u_n^2 = \dfrac{(\ln n)^2}{n}$. On a $u_n^2 \geq \frac{1}{n}$ donc $\sum u_n^2$ diverge.

Le terme général de $\sum u_n$est de signe alterné, et la valeur absolue du terme général tend vers 0

Reste à montrer que $|u_n|$ est décroissant:Soit $\varphi(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^{+*}$ on a

$$\varphi'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x^{3/2}}$$

Ainsi φ décroît sur $\left[e^2, +\infty\right[$ et la série $\sum\limits_{n\geq 8} u_n$ vérifie le critère spécial des séries alternées.

On peut aussi utiliser $u_{2n} + u_{2n+1} = \frac{\ln(n)}{\sqrt{2n}} - \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{2n+1}} = \ln(n).n^{1/2} - \frac{(\ln(n)+\ln(1+1/n))}{\sqrt{2n}(1+1/(2n))^{1/2}} \sim \frac{1}{8}\frac{\ln(n)}{n^{3/2}}$

Donc $\sum u_n$ converge et $\sum u_n^2$ diverge, et d'après le I.5b) :

$$\boxed{\text{Pour } a_n = 1 + (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}},\ (p_n) \text{ converge vers } 0}$$

2) On a maintenant

$$u_n = a_n - 1 = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_n^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

en remarquant que $e^{-t^2} \leq e^{-t}$ pour tout $t \geq 1$ on a :

$$\forall n \geq 1, \int_n^{+\infty} e^{-t^2} dt \ \leq \int_n^{+\infty} e^{-t} dt = e^{-n}$$

donc $-u_n$ est une série à termes positifs majorés par le terme général de la série $\sum \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-n}$. Ainsi, $\sum u_n$ est convergente. Donc le **I.6** s'applique :

$$\boxed{(p_n) \text{ converge vers } p \text{ non nul}}$$

3) D'après l'hypothèse, les p_n sont tous non nuls.

3a) Soit $n > 1$; par définition $1 + u_n = \frac{p_n}{p_{n-1}}$ d'où en divisant par $p_n \neq 0$: $\frac{1}{p_n} + v_n = \frac{1}{p_{n-1}}$

$$\boxed{\text{Pour } n > 1,\ v_n = \frac{1}{p_{n-1}} - \frac{1}{p_n}}$$

On a donc pour $n > 1$, $\sum\limits_{k=1}^{n} v_k = v_1 + \sum_{k=2}^n \left(\dfrac{1}{p_{k-1}} - \dfrac{1}{p_k}\right) = v_1 + \sum_{k=2}^n \dfrac{1}{p_{k-1}} - \sum_{k=2}^n \dfrac{1}{p_k} = v_1 + \dfrac{1}{p_1} - \dfrac{1}{p_n}$ après changement d'indice.

3b)

- Si $\sum u_n$ converge, comme $\sum u_n^2$ converge également par hypothèse, le **I.5a)** s'applique : (p_n) converge vers p non nul, donc $(1/p_n)$ converge vers $1/p$; alors d'après la relation précédente la suite des sommes partielles de $\sum v_n$ converge (et sa limite est $v_1 + \dfrac{1}{p_1} - \dfrac{1}{p}$):

$$\boxed{\text{Si } \sum u_n \text{ converge, alors } \sum v_n \text{ converge également}}$$

- Par contre, avec par exemple $u_n = 1/n$, on a vu au **1a)** que (p_n) diverge vers $+\infty$, donc $(1/p_n)$ converge vers 0 et $\sum v_n$ converge, alors que la série harmonique $\sum u_n$ diverge :

$$\boxed{\text{La convergence de } \sum v_n \text{ n'implique pas la convergence de } \sum u_n}$$

3c) Avec $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$ d'après le **1b)**, (p_n) converge vers 0 et donc $(1/p_n)$ diverge et il en est de même de $\sum v_n$ d'après la relation du a).

$$\boxed{\text{Pour } u_n = (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}, \sum u_n \text{ converge et } \sum v_n \text{ diverge}}$$

comme par hasard les exemples déjà traités sont les contre exemples à utiliser ensuite.

4a) Comme $\alpha > 0$, on a $u_n = \sin \dfrac{c}{n^\alpha} \sim \dfrac{c}{n^\alpha}$.

- Pour $\alpha > 1$, la série $\sum u_n$ est absolument convergente, car $|u_n| \sim \dfrac{|c|}{n^\alpha}$ et donc (p_n) converge vers p non nul, d'après **I.6**.
- Pour $\alpha \leq 1$, la suite des sommes partielles de $\sum 1/n^\alpha$ diverge vers $+\infty$ et donc:
  - si $c > 0$ la série est à termes positifs à partir d'un certain rang et la suite des sommes partielles de $\sum u_n$ admet pour limite $+\infty$. Or les a_n sont strictement positifs à partir d'un certain rang et $\ln a_n \sim u_n$; ainsi le **I.3** s'applique et (p_n) diverge vers $+\infty$
  - Si $c < 0$ de même la suite des sommes partielles de $\sum u_n$ admet pour limite $-\infty$ et (p_n) tend vers $+\infty$
  - si $c = 0$ $a_n = 1$ et (p_n) tend vers 1.

$$\boxed{(p_n) \text{ converge vers 0 si et seulement si } \alpha \leq 1 \text{ et } c < 0}$$

4b) Ici $\alpha = 1$; d'après ce qui précède,

$$\boxed{\text{Si } c \geq 0, \text{ alors } \sum p_n \text{ diverge grossièrement}}$$

Soit donc $c < 0$. On a alors $\lim(p_n) = 0$ et $\forall n$, $p_n > 0$. Cherchons un équivalent de (p_n) en étudiantle développment limité de $\ln(p_n) = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \sin\left(\frac{c}{k}\right)\right)$.

On a $\ln(1+\sin\frac{c}{n}) = \ln\left(1 + \frac{c}{n} + o(\frac{1}{n^2})\right) = \frac{c}{n} - \frac{c^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{c}{n} - v_n$ avec $v_n = \frac{c^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{c^2}{2n^2}$ et donc par comparaison à une série de Riemann $\sum v_n$ converge.

On a donc

$$\ln(p_n) = c\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n v_k = c\left(\ln(n) + \gamma + o(1)\right) + \left(\sum_{k=1}^{+\infty} v_k + o(1)\right)$$

Donc en posant $L = \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty} v_k$

$$\ln(p_n) = c\ln(n) + L + o(1)$$

et donc

$$p_n = e^L n^c e^{o(1)}$$

Or exp est continue en zéro donc $e^{o(1)}$ tend vers $e^0 = 1$ si n tend vers $+\infty$. Donc

$$p_n \sim \frac{e^L}{n^{-c}}$$

D'où par comparaison à un série de Riemann :

$$\boxed{\sum p_n \text{ converge si et seulement si } c < -1}$$