SPE PC 2 DM 3

pour le Vendredi 29 NOVEMBRE

PROBLEME 1

A) Etude d'endomorphismes tels que $u \circ u = 0$.

Soit E un espace vectoriel de dimension n, u un endomorphisme non nul de E tel que $u \circ u = 0$, r le rang de u et p la dimension du noyau de u.

1 - a) Montrer que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$.

b) En déduire que $r \leq \dfrac{n}{2}$ et $p \geq \dfrac{n}{2}$.

2 - Pour cette question, on suppose que $n = 2$:

a) Justifier que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)$.

b) Soient $\boldsymbol{i}$ un vecteur non nul appartenant à Im(u) et j un vecteur tel que $u(j) = \boldsymbol{i}$.

Montrer que $(i,\ j)$ est une base de E , et donner la matrice de u dans cette base.

3 - Pour cette question, on suppose $n = 3$.

a) Montrer que $r = 1$. Quelle est la dimension de Ker(u) ?

b) Soit $\boldsymbol{k}$ un vecteur de E n'appartenant pas à Ker(u) et $\boldsymbol{i} = u(\boldsymbol{k})$. Justifier l'existence d'un v

de Ker(u), non colinéaire à $\boldsymbol{i}$, puis démontrer que $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ est une base de E.

c) Déterminer la matrice de u dans cette base.

B) Application à un exemple.

On rappelle que $M_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels, $GL_3(\mathbb{R})$ l'ensemble constitué par les matrices inversibles de $M_3(\mathbb{R})$.

Dans cette partie, I désigne la matrice unité de $M_3(\mathbb{R})$ et J est la matrice définie par :

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1 - Soit v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice relative à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est J .

a) Vérifier que $v \circ v = 0$.

b) Déterminer le noyau et l'image de v . Préciser leur dimension .

c) Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle v ait pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Dans la suite, on notera P la matrice de passage de l[illegible]se canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\mathcal{B}$.

2 - On considère l'ensemble Δ des matrices M de $M_3(\mathbb{R})$ de la forme $M = I + mJ$ $(m \in \mathbb{R})$.

a) Démontrer que Δ est stable pour la multiplication matricielle.

b) Montrer alors que Δ est un sous-groupe multiplicatif de $GL_3(\mathbb{R})$, isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

c) L'ensemble Δ est-il un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$?

3 - Soit $M = I + mJ$ où m est un réel non nul. On se propose dans cette question de trouver toutes les matrices X de $M_3(\mathbb{R})$ solutions de l'équation (1) : $X^2 = M$.

a) Quelles sont les solutions de (1) appartenant à Δ ?

b) Justifier l'égalité $P^{-1} M P = N$, N désignant la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Montrer qu'en posant $Y = P^{-1} X P$, l'équation (1) équivaut à l'équation (2) : $Y^2 = N$.

d) Soit $Y = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice de $M_3(\mathbb{R})$ solution de (2).

Montrer que $YN = NY$. En déduire que Y est triangulaire supérieure et que $i = a$.

e) Résoudre l'équation (2). On vérifiera qu'il y a une infinité de solutions, dont on précisera la forme.

f) Exprimer alors les solutions de (1) à l'aide de la matrice P (aucun calcul n'est demandé).

Fin du problème.

P3

PROBLEME 2

Ce problème a pour but principal l'étude des coefficients diagonaux des diverses matrices semblables à une matrice donnée.

On désigne par n un entier $\geqslant 2$, par $M_n(\mathbf{R})$ l'espace des matrices à coefficients réels, à n lignes et n colonnes, et par I la matrice identité ; on appelle *scalaires* les matrices de la forme λI où λ est un réel. On rappelle que deux matrices A et B sont dites *semblables* s'il existe une matrice inversible Q vérifiant $B = QAQ^{-1}$, c'est-à-dire si A et B représentent un même endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ dans deux bases de $\mathbf{R}^n$.

Première partie

1. Démontrer les assertions suivantes :

a) Si une matrice A est non scalaire, il existe un vecteur X de $\mathbf{R}^n$, non nul et non vecteur propre pour A.

b) Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$, i et $j \in \{1, \ldots, n\}$. Il existe une matrice B semblable à A telle que

$$b_{i,i} = a_{j,j}\ ,\ b_{j,j} = a_{i,i}\ ,\ b_{k,k} = a_{k,k} \quad \text{pour tout } k \neq i, j\ .$$

Deuxième partie

2. On se donne une matrice A de $M_n(\mathbf{R})$ de trace nulle et on se propose de démontrer qu'il existe une matrice B semblable à A ayant tous ses coefficients diagonaux nuls.

a) Montrer que si A est non nulle, il existe une base $(X_1, \ldots, X_n)$ de $\mathbf{R}^n$ telle que $AX_1 = X_2$.

b) Conclure en procédant par récurrence sur n.

3. *Applications numériques.* Dans chacun des cas considérés, on indiquera une matrice B répondant à la question et une base qui lui correspond.

a) $n = 2$, A est diagonale avec coefficients diagonaux $1, -1$.

b) $n = 3$, A est diagonale avec coefficients diagonaux $1, 0, -1$.

4. Soit A une matrice de $M_n(\mathbf{R})$ non scalaire. Montrer qu'il existe une matrice B semblable à A avec coefficients diagonaux de la forme $(t, 0, \ldots, 0)$, et exprimer t en fonction des coefficients diagonaux de A.

5. Soit A une matrice de $M_n(\mathbf{R})$ non nulle. Montrer qu'il existe une matrice B semblable à A avec coefficients diagonaux tous non nuls.