Corrigé de CCP PC 2008 Mathématiques 2
PARTIE I

$(\mathcal{E}_s)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre deux, à coefficients continus sur l'intervalle $]-1\ 1[$ le coefficient de y" n'ayant. pqas de racine. D'après le théorème de Cauchy Lipschitz, il existe bien une solution et une seule $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

I.1.1 Par linéarité , comme f_s est solution g_s est solution si et seulement si $h_s : x-> f_s(-x)$ est solution.
L'application h_s est deux fois dérivable sur $]-1\ 1[$ et

$$\forall x \in]-1,1[:\ h_s(x) = +f_s(-x), \quad h_s'(x) = -f_s'(-x), \quad h_s''(x) = +f_s''(-x),$$

et donc :$\forall x \in]-1,1[$: :

$$(1-x^2)h_s''(x) - 2(s+2)xh_s'(x) - 2(s+1)h_s(x) \ = \ (1-x)^2\ (+f_s''(-x)\ ) - 2(s+2)x\ (-f_s'(-x)\ ) - 2(s+1)\ (+f_s(-x)\ )$$

Or f_s vérifie $(\mathcal{E}_s)$ et donc $\forall x \in]-1,1[:\ (1-x^2)f_s''(x) - 2(s+2)xf_s'(x) - 2(s+1)f_s(x) = 0$ .On peut substituer $-x$ à x dans la relation :

$$\forall x \in]-1,1[\ ,\ (1-x^2)f_s''(-x) - 2(s+2)(-x)f_s'(-x) - 2(s+1)f_s(-x) \ = 0$$

Ce qui donne bien :

$$(1-x^2)h_s''(x) - 2(s+2)xh_s'(x) - 2(s+1)h_s(x) \ = 0$$

On conclut :

$$\boxed{g_s \text{ est solution de } (\mathcal{E}_s) \text{ sur }]-1\ 1[}$$

I.1.2 On a : $\quad g_s(0) = f_s(0) + f_s(0) = 0 + 0 = 0, \qquad g_s'(0) = f_s'(0) - f_s'(0) = 0.$
Ainsi, g_s est solution de $(\mathcal{E}_s)$ et vérifie la condition initiale $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$. .
Donc par unicité de la solution vérifiant la condition initiale (toujours Cauchy Lipschitz) : $g_s = 0$, d'où :

$$\forall\, x \in]-1\ 1[, \quad f_s(-x) = -f_s(x)$$

$$\boxed{f_s \text{ est impaire}}$$

I.2 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Notons $\quad y_\alpha :]-1\ 1[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto y_\alpha(x) = (1-x^2)^\alpha.$
L'application y_α est deux fois dérivable sur $]-1\ 1[$ d'après les théorèmes généraux, et, pour tout $x \in]-1\ 1[$:

$$y_\alpha(x) = (1-x^2)^\alpha, \quad y_\alpha'(x) = -\alpha 2x(1-x^2)^{\alpha-1}, \quad y_\alpha''(x) = -2\alpha(1-x^2)^{\alpha-1} + \alpha(\alpha-1)4x^2(1-x^2)^{\alpha-2}.$$

D'où, pour tout $x \in]-1\ 1[$:

$$\begin{aligned}
& (1-x^2)y_\alpha''(x) - 2(s+2)xy_\alpha'(x) - 2(s+1)y_\alpha(x) \\
= \ & -2\alpha(1-x^2)^\alpha + 4\alpha(\alpha-1)x^2(1-x^2)^{\alpha-1} + 4\alpha(s+2)x^2(1-x^2)^{\alpha-1} - 2(s+1)(1-x^2)^\alpha \\
= \ & (1-x^2)^{\alpha-1} \left(\ -2\alpha(1-x^2) + 4\alpha(\alpha-1)x^2 + 4\alpha(s+2)x^2 - 2(s+1)(1-x^2) \right) \\
= \ & (1-x^2)^{\alpha-1} \left(\ -2\alpha - 2(s+1) + \ (2\alpha + 4\alpha^2 - 4\alpha + 4\alpha(s+2) + 2(s+1)\ )x^2 \right)
\end{aligned}$$

Le premier facteur est nul . y_α est donc solution ssi le second facteur est nul . Or il s'agit d'un polynôme de degré 2 qui a donc une infinité de racines en x. Ce qui équivaut à dire que ses deux coefficients sont nuls .
Le premier donne $\alpha = -s-1$. Et si on reporte $s = -\alpha - 1$ dans le second on obtient :

$$2\alpha + 4\alpha^2 - 4\alpha + 4\alpha(-\alpha+1) + 2(-\alpha) = 0$$

$$\boxed{y_\alpha \text{ solution de } \mathcal{E}_s \iff \alpha = -(s+1)}$$

I.3.1 L'application $u_s : x \longmapsto (1-x^2)^{s+1}f_s(x)$ est deux fois dérivable sur $]-1\ 1[$ puisque f_s l'est.
On peut faire le calcul directement mais il est plus simple d'utiliser la question précédente : on a en effet : $f_s = u_s.y_\alpha$ et donc on est ramené à une méthode de variation de la constante.
On a : $\quad f_s = y_\alpha u_s, \quad f_s' = y_\alpha' u_s + y_\alpha u_s', \quad f_s'' = y_\alpha'' u_s + 2y_\alpha' u_s' + y_\alpha u_s'',$

donc :

$$
\begin{array}{rcl}
0 & = & (1-x^2)f_s''(x) - 2(s+2)xf_s'(x) - 2(s+1)f_s(x) \\
 & = & \left\{ \begin{array}{l} (1-x^2)\left(\quad y_\alpha''(x)u_s(x) + 2y_\alpha'(x)u_s'(x) + y_\alpha(x)u_s''(x) \right) \\ -2(s+2)x\left(\quad y_\alpha'(x)u_s(x) + y_\alpha(x)u_s'(x) \right) - 2(s+1)\left(\quad y_\alpha(x)u_s(x) \right) \end{array} \right. \\
 & = & \left\{ \begin{array}{l} \left(\quad (1-x^2)y_\alpha''(x) - 2(s+2)xy_\alpha'(x) - 2(s+1)y_\alpha(x) \right) u_s(x) \\ + \left(\quad 2(1-x^2)y_\alpha'(x) - 2(s+2)xy_\alpha(x) \right) u_s'(x) + \left(\quad (1-x^2)y_\alpha(x) \right) u_s''(x) \end{array} \right. \\
 & = & 0.u_\alpha(x) + \left(\quad 2(1-x^2)(-2\alpha x)(1-x^2)^{\alpha-1} - 2(s+2)x(1-x^2)^\alpha \right) u_s'(x) + \left(\quad (1-x^2)^{\alpha+1} \right) u_s''(x) \text{ car } y_\alpha \text{ est solution de } \mathcal{E} \\
 & = & (1-x^2)^\alpha \left(\quad (1-x^2)u_s''(x) + \ (-4\alpha x - 2(s+2)x\ )u_s'(x) \right) = (1-x^2)^\alpha \left(\quad (1-x^2)u_s''(x) + 2sxu_s'(x) \right) . \text{ car } \alpha = -1-s
\end{array}
$$

Ainsi, u_s' est solution sur $]-1\ 1[$ de l'équation différentielle :

$$\boxed{(\mathcal{E}_s') \qquad (1-x^2)y'(x) + 2sxy(x) = 0}$$

I.3.2 $(\mathcal{E}_s')$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1, résoluble, à coefficients continus sur l'intervalle $]-1\ 1[$, sans second membre. La solution générale de $(\mathcal{E}_s')$ est donnée, par :

$$\forall x \in]-1\ 1[\ , y(x) = \lambda\, e^{-\int \frac{2sx}{1-x^2}\, dx)} = \lambda\, e^{s\ln(1-x^2)} = \lambda(1-x^2)^s.$$

On conclut que l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_s')$ sur $]-1\ 1[$ est :

$$\boxed{\{y : \quad x \longmapsto \lambda(1-x^2)^s \quad \lambda \in \mathbb{R}\}}.$$

I.3.3

- On a : $\quad \forall\, x \in]-1\ 1[,\ u_s(x) = (1-x^2)^{s+1}f_s(x),$ donc : $u_s(0) = f_s(0) = 0.$
  et : $\forall\, x \in]-1\ 1[,\quad u_s'(x) = -2(s+1)x(1-x^2)^s f_s(x) + (1-x^2)^{s+1}f_s'(x),$ donc : $u_s'(0) = f_s'(0) = 1.$
- D'après I.3.2., il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\quad \forall\, x \in]-1\ 1[,\quad u_s'(x) = \lambda(1-x^2)^s$.Comme $u_s'(0) = 1$, on a : $\lambda = 1$, donc :
  $$\forall\, x \in]-1\ 1[,\quad u_s'(x) = (1-x^2)^s$$
- D'où, en prenant une primitive
  $$\forall x \in]-1\ 1[\ : \qquad u_s(x) = u_s(0) + \int_0^x u_s'(t)\, dt = \int_0^x (1-t^2)^s\, dt$$
  $$\boxed{\forall x \in]-1\ 1[\ : \qquad u_s(x) = \int_0^x (1-t^2)^s\, dt}$$

I.4.1 On note $\quad y(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{2n+1}$, pour tout $x \in I$, le développement en série entière de y en 0.(il n'y a pas de termes en x^{2n} par parité)
Comme y est développable en série entière sur I intervalle ouvert , y est de classe C^∞ sur I et on peut dériver termes à termes,

$$\forall x \in I\ :\ y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{2n+1}, \quad y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)c_n x^{2n}, \quad y''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (2n+1)\,(2n)\,c_n x^{2n-1}.$$

d'où :

$$
\begin{array}{rcl}
0 & = & (1-x^2)y''(x) - 2(s+2)xy'(x) - 2(s+1)y(x) \\
 & = & (1-x^2)\sum_{n=1}^{+\infty}(2n+1)\,(2n)\,c_n x^{2n-1} - 2(s+2)x\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)c_n x^{2n} - 2(s+1)\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{2n+1} \\
 & = & \sum_{n=1}^{+\infty}(2n+1)\,(2n)\,c_n x^{2n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty}(2n+1)\,(2n)\,c_n x^{2n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} 2(s+2)(2n+1)c_n x^{2n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} 2(s+1)c_n x^{2n+1}
\end{array}
$$

Dans le premier terme on change d'indice , et dans le second on constate que pour $n=0$ on a $(2n+1)2nc_nx^{2n+1}=0$ et donc :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+3)(2n+2)c_{n+1}x^{2n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty}(2n+1)2nc_nx^{2n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty}2(s+2)(2n+1)c_nx^{2n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty}2(s+1)c_nx^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\quad (2n+3)(2n+2)c_{n+1} - (2n+1)2nc_n - 2(s+2)(2n+1)c_n - 2(s+1)c_n\Big)x^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\quad (2n+3)(2n+2)c_{n+1} - 2(n+1)(2s+2n+3)\ )c_n\Big)x^{2n+1} \end{aligned}$$

remarque : la factorisation de $n+1$ n'est peut-être pas évidente si le sujet ne donne pas la réponse.
Par unicité du développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction nulle, y est solution de $(\mathcal{E}_s)$ sur I si et seulement si :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad (2n+3)(2n+2)c_{n+1} - 2(n+1)(2s+2n+3)\ )c_n = 0,$$

ce qui équivaut comme $(2n+2)\neq 0$ et $(2n+3)\neq 0$ à :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad c_{n+1} = \frac{2s+2n+3}{2n+3}c_n}$$

I.4.2 On a alors, de proche en proche, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$c_n = \frac{2s+2n+1}{2n+1}c_{n-1} = \frac{2s+2n+1}{2n+1}\,\frac{2s+2n-1}{2n-1}c_{n-2} = ... = \frac{2s+2n+1}{2n+1}\,\frac{2s+2n-1}{2n-1}\cdots\frac{2s+3}{3}c_0.$$

et donc : :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad c_n = \left(\prod_{k=1}^{n}\frac{2s+2k+1}{2k+1}\right)c_0}$$

I.4.3 Tout polynôme est développable en série donc l'équation différentielle $(\mathcal{E}_s)$ admet au moins une solution polynômiale impaire non identiquement nulle si et seulement la série entière précédente est un polynôme. Donc si et seulement si les coefficients sont nuls à partir d'un certain rang. Or $c_n=0$ si et seulement si $2s+2n+1=0$,soit $s=-n-\dfrac{1}{2}$.
Si il existe une solution polynômiales impaires non identiquement nulles $\exists n\in\mathbb{N}^*$, $s=-n-\dfrac{1}{2}$.
Réciproquement si la condition est remplie $c_n=0$ et on vérifie alors par récurrence que $N\geq n\Longrightarrow c_N=0$

L'équation différentielle $(\mathcal{E}_s)$ admet des solutions polynômiales impaires non identiquement nulles si et seulement si : $\exists n\in\mathbb{N}^*, s=-r$

ce qui équivaut par translation d'indice à $\exists n\in\mathbb{N}$, $s=-n-\dfrac{3}{2}$

I.4.4 On suppose ici $\quad s\notin\left\{-n-\dfrac{3}{2}\ n\in\mathbb{N}\right\}$ .Donc la solution n'est pas polynômiales et tous les coefficients c_n sont non nuls. on peut appliquer pour $x\neq 0$ la règle de D'Alembert:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{c_{n+1}x^{2n+3}}{c_nx^{2n+1}} = \frac{2s+2n+3}{2n+3}x^2 \to_{n\longrightarrow\infty} x^2.$$

La frontière entre le domaine de convergence et celui de divergence est obtenue pour $x^2=1$.

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de la série entière } \sum c_nx^{2n+1} \text{ est } 1}$$

I.5 Le dénominateur est le produit des nombres impairs ; donc classiquement comme :

$$1.3\cdots.(2n+1) = \frac{(2n+1)!}{2.4.\cdots 2n} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

on a :

$$c_n = \frac{2^n n!}{(2n+1)!}\left(\prod_{k=1}^{n}(2s+2k+1)\right)c_0.$$

et donc $y = c_0\left(x+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n n!}{(2n+1)!}\left(\prod_{k=1}^{n}(2s+2k+1)\right)x^{2n+1}\right)$.
Si $f_s = y$ on a $y(0) = f_s(0)$ et $y'(0) = f_s'(0)$. la première condition donne $0 = 0$ et la seconde $c_0 = 1$.
Réciproquement si $c_0 = 1$ alors y et f_s vérifient la même équation différentielle avec la même condition initiale donc (toujours Cauchy) les 2 fonctions sont égales sur $]-1,1[$

$$\boxed{\forall x\in]-1\ 1[,\quad f_s(x) = x+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n n!}{(2n+1)!}\left(\prod_{k=1}^{n}(2s+2k+1)\right)x^{2n+1}}$$

I.6 On sait que $\forall x \in]-1,1[$

$$\begin{aligned} f_s(x) &= u_s(x)\left(1-x^2\right)^{-1-s} \text{ (notation du I.3)} \\ &= (1-x^2)^{-1-s}\int_0^x (1-t^2)^s dt \text{ (résultat du I.3.3} \end{aligned}$$

donc $\forall x \in]-1,1[$

$$\int_0^x (1-t^2)^s dt = (1-x^2)^{1+s} f_s(x)$$

On prend $s = -p - \dfrac{3}{2}$ on a donc

$$\int_0^x (1-t^2)^{-p-\frac{3}{2}} dt = (1-x^2)^{-p-\frac{1}{2}} f_{-p-\frac{3}{2}}(x)$$

On est dans le cas de la question I.4.3: f_s est une fonction polynômiale

$$: \forall x\in]-1\ 1[,\quad f_s(x) = x+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n n!}{(2n+1)!}\left(\prod_{k=1}^{n}(2s+2k+1)\right)x^{2n+1} = x+\sum_{n=1}^{p}\frac{2^n n!}{(2n+1)!}\left(\prod_{k=1}^{n}(-2p+2k)\right)x^{2n+1}$$

.
On a donc $Q_p(x) = f_s(x) = x+\sum_{n=1}^{p}\frac{2^n n!}{(2n+1)!}\left(\prod_{k=1}^{n}(-2p+2k-2)\right)x^{2n+1}$

- Pour $p = 0$, on a : $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Q_0(x)}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$, où : $Q_0(x) = f_{-\frac{3}{2}}(x) = x$
- Pour $p = 1$, on a : $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{Q_1(x)}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}$, où : $\quad Q_1(x) = 1+\dfrac{2\cdot 1!}{3!}(-2)x^3 = x-\dfrac{2}{3}x^3.$

$$\boxed{\int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ ,\ \int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)^{5/2}} = \frac{x-\frac{2}{3}x^3}{(1-x^2)^{3/2}}}$$

PARTIE II

II.1 Pour tout x réel,. La fonction $t \longmapsto (1-t^2)^x$ est continue sur $[0\ 1[$ et à valeurs positives ou nulles .
On pose $u = 1-t$ on a $(1-t^2) = 2u - u^2 \sim_{u->0^+} 2u$

$$(1-t^2)^x \sim_{t->1} 2^x u^x$$

Par comparaison à une intégrale de Riemann $(2u-u^2)^x$ est intégrable sur $]0\ 1]$ si et seulement si $x < -1$, donc, par changement de variable $(1-t^2)^x$ est intégrable sur $[0\ 1[$ si et seulement si $x > -1$.
On conclut :

$$\boxed{\text{le domaine de définition de } \beta \text{ est }]-1\ +\infty[}$$

II.2 Notons

$$f :]-1\ +\infty[\times[0\ 1[\longrightarrow \mathbb{R},\quad (x,t) \longmapsto (1-t^2)^x = e^{x\ln(1-t^2)}.$$

- $\forall t \in [0,1[x->f(x,t)$ est continue sur $]-1,+\infty[$

- $\forall x \in]-1,+\infty[$, $t->f(x,t)$ est continue intégrable sur $[0,1[$ d'après la question précédente.
- Soit $[a,b] \subset]-1\ +\infty[$. On a, pour tout $(x,t) \in [a,b] \times [0\ 1[$ comme $\ln(1-t^2) \leq 0$:

$$|f(x,t)| = e^{x\ln(1-t^2)} \leqslant e^{a\ln(1-t^2)}$$

L'application $t->e^{a\ln(1-t^2)}$ est continue, intégrable sur $[0\ 1[$ (d'après II.) et indépendante de x..

Ainsi, f vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment. D'après le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre

$$\boxed{\beta \text{ est continue sur }]-1\ +\infty[}$$

.II.3

Soit $x \in]-1\ +\infty[$.

L'application $t \longmapsto (1-t^2)^x \ln(1-t^2)$ est continue sur $[0\ 1[$, à valeurs $\leqslant 0$, et n'est pas la fonction nulle ($\beta'(-1/2)$), donc par positivité stricte appliquée à -β $\beta'(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^x \ln(1-t^2)\,dt < 0$.

$$\boxed{\beta \text{ est strictement décroissante sur }]-1\ +\infty[}$$

II.4.1 Soit $x \in]-1\ +\infty[$.

On a alors $x+1 \in]-1\ +\infty[$ et $\quad \beta(x+1) = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^{x+1}\,dt$.

Procédons à une intégration par parties en posant $u(t) = (1-t^2)^{x+1}, v(t) = t$ qui sont de classe C^1 sur le segment $[0\ 1[$. On a :

$$\forall T \in [0,1[\ ,\ \int_0^T (1-t^2)^{x+1}\,dt = \left[(1-t^2)^{x+1}t\right]_0^T - \int_0^T \left(\quad (x+1)(-2t)(1-t^2)^x \right) t\,dt = (1-T^2)^{x+1}T + 2(x+1)\int_0^T t^2(1-t^2)^x\,dt$$

or $t^2 = 1-(1-t^2)$ et donc :

$$= (1-T^2)^{x+1}T + 2(x+1)\ \left(\int_0^T (1-t^2)^x\,dt\ - \int_0^T (1-t^2)^{x+1}\,dt \right)$$

Comme $x+1>0$, $(1-T^2)^{x+1} \longrightarrow_{T\ \longrightarrow\ 1^-} 0$, d'où, en passant aux limites lorsque $T \longrightarrow 1^-$:

$$\beta(x+1) = 2(x+1)\ (-\beta(x+1)+\beta(x)\ ),$$

c'est-à-dire :

$$(2x+3)\beta(x+1) = (2x+2)\beta(x),$$

d'où comme $2x+3 \neq 0$

$$\boxed{\forall x \in]-1\ +\infty[,\quad \beta(x+1) = \frac{2x+2}{2x+3}\beta(x)}$$

II.4.2

- On a : $\quad \beta(0) = \displaystyle\int_0^1 1\,dt = 1$.
- D'après II.2 β est continue en 0 et donc :

$$\beta(x) = \frac{2x+3}{2x+2}.\beta(x+1) \longrightarrow_{x\ \longrightarrow\ -1^+} +\infty.1 = +\infty.$$

$$\boxed{\lim_{-1^+}(\beta(x)) = +\infty}$$

II.4.3

- On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\beta(n) = \frac{2n}{2n+1}\beta(n-1) = \frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1}\beta(n-2) = ... = \frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\frac{2}{3}\beta(0)$$
$$= \frac{(2n)(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3} = \frac{((2n)(2n-2)\cdots 2\ )^2}{(2n+1)!} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

vrai aussi si $n=0$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \beta(n) = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}}$$

- La formule de Stirling donne l'équivalent : $n! \sim_{n\longrightarrow\infty} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

  On déduit :

$$\beta(n) \sim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{(\frac{2n}{e})^{2n} 2\pi n}{(\frac{2n+1}{e})^{2n+1}\sqrt{2\pi(2n+1)}} = \frac{2^{2n+1}n^{2n+1}e\pi}{(2n+1)^{2n+1}\sqrt{2\pi(2n+1)}} = (\frac{2n}{2n+1})^{2n+1}\frac{e\pi}{\sqrt{2\pi(2n+1)}}.$$

  Or :

$$\ln\left((\frac{2n}{2n+1})^{2n+1}\right) = (2n+1)\ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right) \sim (2n+1)\ (1 - \frac{1}{2n+1}\ ) \longrightarrow_{n\longrightarrow+\infty} -1$$

  d'où :

$$\boxed{\beta(n) \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{e}\frac{e\pi}{\sqrt{2\pi 2n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}}.$$

- Il en résulte : $\beta(n) \longrightarrow_{n\to\infty} 0$.
- β est décroissante, donc comme $E(x) \leq x \leq E(x)+1$:

$$\beta\ (E(x)+1\ ) \leqslant \beta(x) \leqslant \beta\ (E(x)\ ).$$

  $E(x)$ est un entier et $E(x) \longrightarrow_{x\ \longrightarrow\ +\infty} +\infty$, donc par composition des limites : :

$$\beta\ (E(x)+1\ ) \longrightarrow_{x\ \longrightarrow\ +\infty} 0 \quad \text{et} \quad \beta\ (E(x)\ ) \longrightarrow_{x\ \longrightarrow\ +\infty} 0,$$

  d'où, par encadrement :

$$\boxed{\beta(x) \longrightarrow_{x\longrightarrow+\infty} 0}$$

II.4.4

- On a :

$$\beta\ \ (-\frac{1}{2}\ ) = \int_0^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\, dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = [\arcsin(t)]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

- On en déduit avec la relation du II.4.1:$\forall\ n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\beta\left(n-\frac{1}{2}\right) &= \frac{2n-1}{2n}\beta\left(n-\frac{3}{2}\right) = ... = \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-1}\cdots\frac{1}{2}\beta\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{(2n)(2n-2)\cdots 2}\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n)!}{((2n)(2n-2)\cdots 2)^{\,2}}\frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\beta\left(n-\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2}}$$

PARTIE III

On ferra très attention à ce que, contrairement au problème CCP MP 2008 vu en TD jeudi dernier, la convention pour la constate n'est pas celle du cours.

III.1.1 L'application φ_γ est 2π-périodique et continue sur $\mathbb{R}$ car $\gamma > 0$ par composition de fonctions continues sur leur domaine.

L'application $u->|u|$ est C^1 en tout point où $u \neq 0$, donc φ_γ est C^1 en tout point $x \neq \pi/2[\pi]$.

Si $x = \pi/2$ $u->|u|$ est dérivable à droite (et à gauche) en 0 . De plus $\gamma \geq 1$ donc $v->v^\gamma$ est C^1en 0,donc par composition φ_γ est dérivable à droite (et à gauche) . Par période π le résultat reste vrai en tout point $\pi/2[\pi]$.

remarque : comme $\gamma > 1$, on a même une foonction C^1 sur $\mathbb{R}$

finalement φ_γ est continue , 2π périodique , C^1_{pm} sur $\mathbb{R}$, donc la série de Fourier de φ_γ converge normalement vers φ_γ sur $\mathbb{R}$ et φ_γ est développable en série de Fourier.

III.1.2

- cos est paire donc φ_γ est paire.Les coefficients $b_n(\gamma), n \in \mathbb{N}^*$ sont donc tous nuls.

- Pour tout p on a :

$$a_{2p+1}(\gamma) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\cos(x)|^{\gamma} \cos((2p+1)x)\ dx$$

Mais si $\theta(x) = |\cos(x)|^{\gamma}\cos((2p+1)x)$, on constate que $\theta(x+\pi) = -\theta(x)$ et donc en posant $u = x - \pi$

$$\int_0^{\pi} \theta(x)dx = -\int_{-\pi}^{0} \theta(u)du$$

et donc $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \theta(x)dx = 0$ soit $a_{2p+1}(\gamma) = 0$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N},\ \ a_{2p+1}(\gamma) = 0}.$$

III.2.1 Pour tout p on a comme $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$

$$I_p - I_{p+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\gamma}(x)\ \ (\cos(2px) - \cos((2p+2)x\ ))\ dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\gamma}(x)\sin(x)\sin((2p+1)x)\ dx$$

III.2.2 On fait une intégration par parties, avec :

$$u(x) = \frac{\cos^{\gamma+1}(x)}{\gamma+1}\quad ,\quad v(x) = \sin((2p+1))(x)$$

u, v sont bien C^1 sur le segment $[0\ \pi/2]$.
On a :

$$\begin{aligned}
I_p - I_{p+1} &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{\gamma}(x)\sin(x))\sin((2p+1))\,x\,dx = \left[2 - \frac{\cos^{\gamma+1}(x)}{\gamma+1}\sin((2p+1)x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{\cos^{\gamma+1}(x)}{\gamma+1}(2p+1)\cos((2p+1)x \\
&= 2\frac{2p+1}{\gamma+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\gamma+1}(x)\cos((2p+1)x)\ dx = 2\frac{2p+1}{\gamma+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\gamma}(x)\cos(x)\cos((2p+1)x)
\end{aligned}$$

III.2.3 On obtient comme $\cos(p)\cos(q) = \dfrac{\cos(p+q) - \cos(p-q)}{2}$:

$$I_p - I_{p+1} = \frac{2p+1}{\gamma+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\gamma} x\ (\cos(2p+2)x + \cos(2px)\ )\,dx = \frac{2p+1}{\gamma+1}(I_p + I_{p+1})$$

$$\boxed{I_p - I_{p+1} = \frac{2p+1}{\gamma+1}(I_p + I_{p+1})}$$

III.2.4 On a $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\gamma} x\,dx.$

On fait le changement de variable $\quad t = \sin x,\ x = \arcsin t,\ dx = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$:

$$I_0 = \int_0^1 (\sqrt{1-t^2})^{\gamma}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ dt = \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{\gamma-1}{2}}\ dt = \beta\ \ (\frac{\gamma-1}{2}\ \ ).$$

$$\boxed{\text{si}\quad \gamma' = \frac{\gamma-1}{2}\ ,\ I_0 = \beta(\gamma')}$$

III.2.5 D'après III.2.3., on a, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$(\gamma+1)(I_p - I_{p+1}) = (2p+1)(I_p + I_{p+1}),$$

d'où :

$$(2p+\gamma+2)I_{p+1} = (\gamma - 2p)I_p,$$

donc comme $(2p+\gamma+2) \neq 0$ (toujours l'hypothèse $\gamma > 1$) :

$$I_{p+1} = \frac{\gamma - 2p}{\gamma + 2p + 2}I_p.$$

D'où,$\forall\ p \in \mathbb{N}^*$:

$$I_p = \frac{\gamma - 2p + 2}{\gamma + 2p}I_{p-1} = ... = \frac{\gamma - 2p + 2}{\gamma + 2p}\,\frac{\gamma - 2p + 4}{\gamma + 2p - 2}\cdots\frac{\gamma}{\gamma+2}I_0 = \frac{\gamma}{\gamma + 2p}\quad\left(\prod_{k=0}^{p-1}\frac{\gamma - 2k}{\gamma + 2k}\right)\quad\beta(\gamma').$$

III.3

- La fonction $\theta(x) = |\cos(x)|^\gamma \cos((2p+1)x)$ est π périodique paire et donc :

$$\int_0^\pi \theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \theta = 2\int_0^{\pi/2} \theta$$

- On a, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$a_{2p}(\gamma) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\gamma(x)\cos(2px)\,dx = \frac{4}{\pi}I_p = \frac{4}{\pi}\frac{\gamma}{\gamma+2p}A_p(\gamma)\beta(\gamma')$$

- et **avec la notation du cours** "a_0"$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\gamma(x)\ dx = \frac{4}{\pi}I_0 = \frac{4}{\pi}\beta(\gamma')$ et donc avec la notation du sujet $a_0(\gamma) = \frac{a_0}{2} = \frac{2}{\pi}\beta(\gamma')$

$$\boxed{a_0(\gamma) = \frac{2}{\pi}\beta(\gamma')\ ,\forall p \in \mathbb{N}^*\ ,\ a_{2p}(\gamma) = \frac{4}{\pi}\frac{\gamma}{\gamma+2p}A_p(\gamma)\beta(\gamma')}$$