

PROBLEME**Partie I**

Soit E , un \mathbb{R} -espace vectoriel. On désigne par I l'application identité de E ($I = \text{Id}_E$).

Soit f , un endomorphisme de E , α et β deux réels distincts tels que : $(f - \alpha I) \circ (f - \beta I) = 0$.

On pose : $F_\alpha = \text{Ker}(f - \alpha I)$ et $F_\beta = \text{Ker}(f - \beta I)$.

1. Prouver les inclusions suivantes : $\text{Im}(f - \beta I) \subset F_\alpha$ et $\text{Im}(f - \alpha I) \subset F_\beta$.
2. Démontrer¹ que les sous-espaces vectoriels F_α et F_β sont supplémentaires dans E .
3. On désigne par p le projecteur sur F_α parallèlement à F_β , et par q le projecteur sur F_β parallèlement à F_α . Expliciter p et q en fonction de f et de I , puis démontrer que : $p + q = I$ et $p \circ q = q \circ p = 0$.
4. Vérifier que $f = \alpha p + \beta q$.
5. En déduire une expression simple de l'endomorphisme f^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
6. Démontrer que, si $\alpha\beta \neq 0$, alors f est un automorphisme de E , et déterminer une expression de f^{-1} à l'aide de f , α et β .

Dans ce cas, donner une expression de f^n pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$.

Partie II

Dans cette partie, g désigne l'application

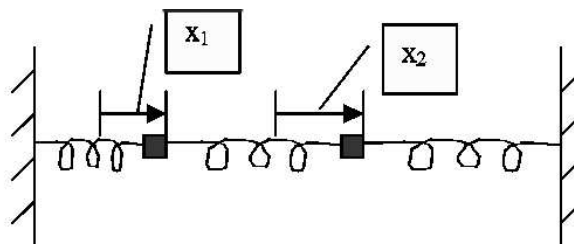
$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto g(x, y) = (-2x + y, x - 2y) \end{array} \right.$$

1. Démontrer que g est un endomorphisme de l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 .
Préciser son noyau et son image : g est-il un automorphisme de \mathbb{R}^2 ?
2. Déterminer l'expression analytique de l'endomorphisme $g^2 + 4g + 3I$.
En déduire l'existence de deux réels α et β tels que : $(g - \alpha I) \circ (g - \beta I) = 0$ (on choisira $\alpha < \beta$).
3. Déterminer les sous-espaces $G_\alpha = \text{Ker}(g - \alpha I)$ et $G_\beta = \text{Ker}(g - \beta I)$ (équation(s) ET famille génératrice).
4. Déterminer les projections p sur G_α parallèlement à G_β , et q sur G_β parallèlement à G_α (on demande ici une expression explicite de $p(x, y)$ et $q(x, y)$).
5. Vérifier qu'on a bien $p + q = I$ et $\alpha p + \beta q = g$.
6. Déterminer l'endomorphisme g^n pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$.

¹On pourra éventuellement commencer par prouver l'existence de deux réels a et b tels que $I = a(f - \alpha I) + b(f - \beta I)$

Partie III

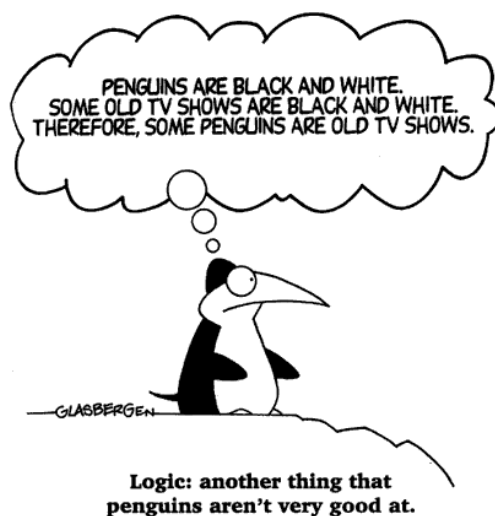
Deux masses identiques sont reliées à deux points fixes entre elles par trois ressorts de même raideur.



On admet que les abscisses x_1 et x_2 des deux masses, repérées par rapport à la position d'équilibre respective, sont, en fonction du temps t , solutions du système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x_1''(t) + 2x_1(t) - x_2(t) = 0 \\ x_2''(t) + 2x_2(t) - x_1(t) = 0 \end{cases}$$

- Démontrer que, pour tout réel t : $(x_1''(t), x_2''(t)) = g(x_1(t), x_2(t))$.
- On pose, pour tout réel t : $y(t) = \frac{x_1(t) - x_2(t)}{2}$ et $z(t) = \frac{x_1(t) + x_2(t)}{2}$.
Que représentent les vecteurs $(y(t), -y(t))$ et $(z(t), z(t))$?
- Etablir une équation différentielle vérifiée par $y(t)$ et une équation différentielle vérifiée par $z(t)$. Résoudre ces équations différentielles.
- En déduire les solutions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ avec les conditions initiales
 $x_1(0) = 0, \quad x_1'(0) = 0, \quad x_2(0) = 1, \quad \text{et} \quad x_2'(0) = 0.$
- Ces fonctions sont-elles bornées ?
- Ces fonctions sont-elles périodiques² ?



²On pourra raisonner par l'absurde et utiliser la dérivation afin d'obtenir d'autres relations. On rappelle que si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x + P) = \cos(x)$, alors P est nécessairement un multiple entier de 2π , (i.e) il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $P = 2k\pi$.