Exercice 1 Soit $\Delta = ABC$ un triangle, on note O le centre du cercle circonscrit à Δ. On identifie le plan au plan complexe dont on place l'origine en O, ainsi l'affixe de O est 0. On note a, b et c les affixes de A, B et C. On note G l'isobarycentre de Δ et A' le symétrique de A par rapport à O.

1. Donner la relation vectorielle qui définit G, en déduire l'affixe g de G en fonction de a, b et c.
2. Soit P l'isobarycentre de $A'BC$, donner l'affixe p de P.
3. Si on note Ω le point d'intersection de AP et de OG, on se propose de prouver l'égalité suivante : $\overrightarrow{\Omega G} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{\Omega O}$.
   Pour cela on introduit, pour commencer, le point Ω d'affixe $\omega = \lambda g$ où λ est un réel.
   (a) A quelle droite le point Ω appartient-il, ceci quelque soit la valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$?
   (b) Quelle valeur de λ doit-on choisir pour avoir la relation annoncée ?
   (c) Pour la valeur de λ que vous avez choisie, prouvez que le point Ω est bien aligné avec A et P et conclure.
4. Démontrer le résultat suivant : « soit ABC un triangle, A', B' et C' les symétriques de A, B et C par rapport au centre du cercle circonscrit, si P, Q et R désignent les isobarycentres des triangles $A'BC$, $AB'C$ et ABC' alors les droites (AP) , (BQ) et (CR) sont concourantes. »

Exercice 2 On désire prouver que pour tout nombre complexe z de module 1, on a

$$\sqrt{3} \leq |1+z| + \left|1 - z + z^2\right| \leq \frac{13}{4}$$

Dans tout l'exercice z désigne donc un nombre complexe de module 1.

1. On pose $t = |1+z|$, dans quel intervalle se trouve le réel t ?
2. Exprimer $\operatorname{Re}(z)$ à l'aide de t.
3. Montrer que
$$\left|1 - z + z^2\right|^2 = 3 - 4\operatorname{Re}(z) + 2\operatorname{Re}\left(z^2\right)$$
4. Exprimer $\operatorname{Re}\left(z^2\right)$ en fonction de $\operatorname{Re}(z)$ (indication : forme polaire). En déduire que
$$|1+z| + \left|1 - z + z^2\right| = t + \left|3 - t^2\right|$$
5. En déduire l'inégalité demandée. Trouver un complexe z qui réalise le minimum.