

Exercice 1 Soit $u \in \mathbb{C}$: on considère l'équation

$$(E) : z^2 + 3iz + u(i - u) = 2.$$

- Déterminer les solutions de (E). On notera z_1 et z_2 ces solutions.
Vérifier la justesse des calculs en simplifiant les quantités $z_1 z_2$ et $z_1 + z_2$.
Attention : les trois questions suivantes sont largement indépendantes.
- On note M_1, M_2, A et U les points d'affixes respectives $z_1, z_2, -i$ et u .
Déterminer le lieu de U pour que
 - M_1, M_2 et A soient alignés.
 - M_1, M_2 et A forment un triangle rectangle en A .
- Déterminer les valeurs de u pour lesquelles $z_1 z_2 = 10i$.
- Déterminer le lieu de U pour que $z_1 z_2$ soit réel. On trouvera la réunion de deux ensembles simples. Si $z_1 z_2 = x \in \mathbb{R}$, préciser, selon x , quand U est dans l'un ou l'autre de ces ensembles.

Exercice 2 (FACULTATIF)

On considère un polynôme P , de degré $n \geq 1$ et à coefficients complexes défini par :

$$\text{pour tout } z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k z^k.$$

On admet qu'il existe une constante M positive telle que :

$$\text{pour tout } z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| = 1, \text{ on a } |P(z)| \leq M.$$

On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n+1}}$ et, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$: $S_k = \sum_{j=0}^n \omega^{kj} = 1 + \omega^k + \omega^{2k} + \dots + \omega^{nk}$.

- Justifier l'égalité $\sum_{j=0}^n P(\omega^j) = \sum_{k=0}^n a_k S_k$.
- Déterminer la valeur de S_k en fonction de la valeur de k .
- En déduire, des deux questions précédentes, la relation : $\sum_{j=0}^n P(\omega^j) = (n+1)a_0$.
- Puis, enfin, montrer qu'on a nécessairement $|a_0| \leq M$.

On vient donc de prouver que tout majorant du module d'un polynôme sur le cercle unité (par exemple le maximum de $|P(z)|$ pour z parcourant \mathbb{U}) est au moins égal au module de la valeur de ce polynôme évalué en 0 (centre du disque).