Exercice 1

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$, on définit l'ensemble D_λ des points M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}$ tels que

$$\left(1-\lambda^2\right)x + 2\lambda y + a\left(1+\lambda\right)^2 = 0$$

1. Montrer que D_λ est une droite du plan.

Etude du cas $a = 0$

On suppose que $a = 0$.

2. Montrer qu'il existe un point Ω qui appartient à toutes les droites D_λ.
3. Quelle est la droite D_0 ?
4. On pose $\lambda = \tan\dfrac{t}{2}$ où $t \in \left]-\pi, 0\right[\cup \left]0, \pi\right[$, ainsi $\lambda \neq 0$.
   Donner une équation normale [1] de la droite D_λ.
5. Soit M de coordonnées $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}$ avec $\alpha \neq 0$: combien passe-t-il de droites de la famille $(D_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ par M ?
6. Si M est sur l'axe Oy et $M \neq O$, combien passe-t-il de droites de la famille $(D_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ par M ?

Etude du cas général $a \neq 0$

On suppose désormais $a \in \mathbb{R}^*$.

7. Soit deux réels λ et μ.
   (a) Montrer que les droites D_λ et D_μ sont parallèles si et seulement si ($\lambda = \mu$ ou $\lambda\mu = -1$).
   (b) En déduire l'équivalence : $(D_\lambda = D_\mu) \Leftrightarrow (\lambda = \mu)$.
8. Soit M de coordonnées $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}$ avec $\alpha \neq a$.
   Montrer qu'il passe au moins une droite de la famille $(D_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ par M si et seulement si :
   $$\alpha^2 + (\beta + a)^2 - a^2 \geq 0.$$
9. En déduire qu'il existe un cercle C_a (de centre I_a à préciser) passant par O, une droite D et un point A appartenant à D (dont on précisera les coordonnées) tels que
   - si $M \in C_a$ privé de A il passe une unique droite D_λ par M.
   - si M est à l'extérieur du cercle, M non situé sur D, il passe deux droites distinctes de la famille $(D_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ par M
   - si M est sur D privé de A, il passe une unique droite de la famille $(D_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ par M.
   - par A, il ne passe aucune droite de la famille $(D_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$.

   Que se passe-t-il pour les points M situés à l'intérieur du cercle C_a ?
10. Montrer que pour tout réel λ la droite D_λ est tangente à C_a.

[1] Rappel : toute droite du plan possède une *équation normale* sous la forme $\cos(\theta)x + \sin(\theta)y = p$, avec θ et p réels.

Deux petites questions indépendantes du reste...

11. Donner une équation polaire de C_a.
12. Pour quelle valeur de λ la droite D_λ ne passe-t-elle pas par O ? Dans ce cas, montrer que si l'on pose $\lambda = \tan \dfrac{t}{2}$ avec $t \in \left]-\pi, \pi\right[$ (et $t \neq t_0$ à préciser), une équation polaire de D_λ est $r = -a\dfrac{1+\sin t}{\cos(\theta - t)}$. On pourra commencer par en chercher une équation normale.
Réaliser un schéma avec $a = 2$, $t = \dfrac{\pi}{6}$ (et donc $\lambda = ?$) : placer le cercle C_a, la droite D_λ.

Etude du lieu des points M où il passe deux droites perpendiculaires de la famille

13. Soit u et v deux réels, on note $S = u + v$ et $P = uv$.
Exprimer $\left(1-u^2\right)\left(1-v^2\right) + 4uv$ en fonction de S et P (uniquement).
14. Montrer que les points où il passe deux droites de la famille perpendiculaires entre elles sont sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Etude d'une autre famille de droites

On considère la famille de droites $(\Delta_a)_{a\in\mathbb{R}}$ d'équation $2ax + \left(a^2-1\right)y - 2a = 0$.

15. Justifier que l'on a toujours une droite.
16. Montrer que toutes les droites de la famille $(\Delta_a)_{a\in\mathbb{R}}$ passent par un point fixe B : préciser ses coordonnées.
17. Montrer que pour tout réel $a \neq 0$, la droite Δ_a est tangente à C_a.
18. On prend désormais $a \neq 0$. On rappelle qu'on a noté I_a le centre de C_a : soit T_a le projeté orthogonal de I_a sur la droite Δ_a. Calculer les coordonnées de ce point T_a.
19. On considère Γ_a le cercle passant par B et de diamètre $[BI_a]$. Il existe un point remarquable qui appartient à Γ_a : lequel ?
20. Justifier que T_a est aussi sur Γ_a.
21. Retrouver ainsi les coordonnées du point T_a par une autre méthode.
22. Montrer que, lorsque a varie, T_a reste sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$ *(FACULTATIF)* Déterminer, en fonction des paramètres réels a et b, le nombre de point d'intersection entre la courbe Γ d'équation $y = \mathrm{sh}(x)$ et la droite D d'équation $y = ax + b$.

NON SEQUITUR By Wiley