

**Exercice 1**

1. Montrer que, pour  $x > 0$ , on a :  $\ln(x) \leq x - 1$ .
2. En déduire que, pour  $x > 0$ , on a :  $\ln(x) \geq 1 - \frac{1}{x}$ .  
Représenter les inégalités des questions 1 et 2 sur une figure.
3. On pose  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ . Quel est l'ensemble de définition de  $f$  ?
4. Calculer  $f'(x)$  et déterminer son signe grâce à la question 2.
5. Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x).$$

6. Déduire des questions précédentes que, pour tout entier  $n \geq 1$ , on a :

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e.$$

7. On pose  $u_n = \frac{n^n}{n!}$ . Pour  $n \geq 1$ , simplifier  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  en utilisant  $f$ .

En déduire, pour  $n \geq 2$ , un encadrement de  $u_n$  faisant intervenir  $u_{n-1}$ , puis un encadrement de  $u_n$  faisant intervenir  $u_1$  (et  $n$ ).

Montrer enfin que, pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$e \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq 2 \left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

8. Une application : en déduire l'expression littérale de deux puissances de 10 encadrant 500!.  
Autrement dit, déterminer deux entiers  $p$  et  $q$  tels que  $10^p \leq 500! \leq 10^q$ .
9. Une autre application : que peut-on dire des suites  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ,  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définies par

$$v_n = \frac{n!}{n^n} \quad \text{et} \quad w_n = \frac{2 \times 4 \times \dots \times (2n)}{n^n} = \frac{\prod_{k=1}^n (2k)}{n^n} \quad \text{et} \quad x_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} ?$$

**Exercice 2** Pour tout réel  $\theta$ , on considère l'équation

$$(E_\theta) \quad \left\langle -\frac{\cos(\theta)}{\sqrt{2}}x + \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{2}}y + \sin(\theta)z = 1 \right\rangle.$$

L'espace est rapporté à un repère orthonormé  $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

1. Justifier que, pour tout réel  $\theta$ , cette équation  $(E_\theta)$  est celle d'un plan que l'on notera  $\mathcal{P}_\theta$ .
2. Pour cette question seulement, on choisit  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

On définit alors les plans  $\mathcal{Q}_\theta$  et  $\mathcal{R}_\theta$  d'équations respectives

$$\left\langle \cos(\theta)x + \sin(\theta)z = 1 \right\rangle \quad \text{et} \quad \left\langle -x + y + \sqrt{2}z = 0 \right\rangle.$$

Déterminer, en fonction de la valeur de  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , l'intersection des trois plans  $\mathcal{P}_\theta$ ,  $\mathcal{Q}_\theta$  et  $\mathcal{R}_\theta$ .

Le cas échéant, si cette intersection est une droite, on en précisera un point et un vecteur directeur (puis une représentation paramétrique).

3. Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Calculer la distance du point  $O$ , origine du repère, au plan  $\mathcal{P}_\theta$ .

Que remarque-t-on ?

4. Pour tout réel  $\theta$  : déterminer, en fonction de  $\theta$ , les coordonnées  $(x_0, y_0, z_0)$  de  $H$ , le projeté orthogonal de  $O$  sur le plan  $\mathcal{P}_\theta$ .

Montrer que, lorsque  $\theta$  varie, le point  $H$  reste sur un cercle fixe que l'on caractérisera (centre et rayon).

**Exercice 3** (FACULTATIF)

Soit deux réels  $t$  et  $\theta$ , avec  $t \in \mathbb{R}$  et  $\theta \in [0, 2\pi[$ , et l'application  $f$  qui, à tout point  $M = (x, y, z)$

associe le point  $M' = f(M) = (x', y', z')$  où 
$$\begin{cases} x' = x \cos(\theta) - y \sin(\theta) \\ y' = x \sin(\theta) + y \cos(\theta) \\ z' = z + t \end{cases} .$$

On considère la suite  $(M_n)_{n \geq 0}$  de points de l'espace définie par :

$$M_0 = (1, 0, 0) \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, M_{n+1} = f(M_n).$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le couple  $(t, \theta)$  pour que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(M_n M_{n+1} M_{n+2} M_{n+3})$  soit un tétraèdre régulier.