

Ce qui suit fera office de cours sur les notions d'injection/surjection/bijection.

Les exercices obligatoires, à traiter en priorité sont les suivants :

1.4.1, 1.4.2, 1.4.5, 1.4.7 et 2.3.1 et 2.4.1, 2.4.2, 2.4.3, 2.4.4 et 3.2.1, 3.2.5, 3.2.6.

Les autres exercices n'en sont pas moins intéressants pour autant, et doivent mériter votre attention.

1 Définitions de injection-surjection-bijection

On considère une application $f : A \rightarrow B$, où A est l'ensemble de départ (ensemble de définition de l'application) de f et B l'ensemble d'arrivée de f . Ainsi, pour tout $x \in A$, $f(x)$ existe (de manière unique!) et $f(x) \in B$. On dit que $f(x)$ est **l'image** de x par l'application f . Si $y \in B$ et s'il existe un élément $x \in A$ tel que $y = f(x)$, on dit que x est **un antécédent** de y par f .

1.1 Injection

On dit que $f : A \rightarrow B$ est une **injection** (application injective) si « deux éléments différents de A ont toujours des images différentes par f (dans B) ». Ceci se traduit par :

$$f \text{ est injective si : } \langle \forall (x, x') \in A^2 : (x \neq x') \Rightarrow (f(x) \neq f(x')) \rangle.$$

Une définition équivalente (obtenue par contraposition) est : « si deux éléments de A ont la même image alors, nécessairement, ils sont égaux », (ie) « $\forall (x, x') \in A^2 : (f(x) = f(x')) \Rightarrow (x = x')$ ».

Une application $f : A \rightarrow B$ est donc injective lorsque tout élément y de B possède au plus (0 ou 1) un antécédent x **dans** l'ensemble A (x tel que $f(x) = y$).

Exemple : soit E un ensemble.

On note id_E l'application qui à tout $x \in E$ associe x , c'est à dire : $\forall x \in E, \text{id}_E(x) = x$.

L'application id_E est une injection, car si $(x, x') \in E^2$, alors $\text{id}_E(x) = \text{id}_E(x') \Rightarrow x = x'$.

Exemple : soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, avec $f(x) = x^3$. Pour $(x, x') \in \mathbb{R}^2$, si $f(x) = f(x')$, alors $x^3 - x'^3 = 0$, (ie) $(x - x')(x^2 + xx' + x'^2) = 0$, d'où $x = x'$ ou $x^2 + xx' + x'^2 = 0$, cette dernière égalité entraînant $x = x' = 0$ (pas évident...à vérifier!). Dans tous les cas, on a forcément $x = x'$. Donc f est injective.

Méthode :

1. pour montrer qu'une application $f : A \rightarrow B$ est injective : on montre que, pour tous les couples (x, x') d'éléments de A , l'hypothèse $f(x) = f(x')$ entraîne nécessairement $x = x'$.
2. pour montrer qu'une application $f : A \rightarrow B$ n'est pas injective : il suffit de trouver deux éléments x et x' distincts ($x \neq x'$) qui ont la même image par f , (ie) vérifiant $f(x) = f(x')$.
3. autre méthode : pour prouver que f est injective, on montre que, **pour tout** $y \in B$, l'équation « $f(x) = y$ », d'inconnue x , possède **au plus** (i.e 0 ou 1) solution x **dans** l'ensemble A .

Remarque : soit I un intervalle de \mathbb{R} et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Si f est strictement croissante, alors f est injective. En effet, si x et y sont deux éléments distincts de I , on a $x < y$ ou bien $y < x$. Supposons

que l'on ait $x < y$, alors, f étant strictement croissante, on a $f(x) < f(y)$ et donc $f(x) \neq f(y)$. De même si $y < x$. De même, si f est strictement décroissante, alors f est injective.

ATTENTION : il est clair que cette dernière remarque ne s'applique pas si on ne connaît pas de relation d'ordre \leq sur A ou B (exemple : $A = \{\text{élèves du lycée Faidherbe}\}$, $B = \mathbb{C}$, $A = \mathbb{R}^3$, etc.).

1.2 Surjection

On dit que $f : A \rightarrow B$ est une **surjection** (application surjective) si « pour tout élément de B , il existe au moins un antécédent par f dans A ». Ceci se traduit par :

$$f \text{ est surjective si : } \langle \forall y \in B, \exists x \in A \mid y = f(x) \rangle.$$

Exemple : l'application id_E introduite précédemment est une surjection de E dans E , car

$\forall y \in E, y = \text{id}_E(y)$, autrement dit : tout élément y de E admet au moins un antécédent : lui-même !

Exemple : soit $f : [-2, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$, avec $f(x) = x^2 + 1$. Pour tout $y \in [1, +\infty[$: on cherche s'il existe toujours au moins un $x \in [-2, +\infty[$ tel que $y = f(x) = x^2 + 1$. Il est clair que $x = \sqrt{y-1}$ est une solution, qui existe car $y \geq 1$, et qui appartient bien à l'ensemble de départ, car $x \geq 0 \geq -2$. L'application f est donc bien surjective. On remarque que pour certains y (précisément ceux vérifiant $1 < y \leq 5$), il existe même deux solutions x opposées, mais cela n'est pas gênant pour la surjectivité ("au moins un"). Par contre, cela entraîne que f n'est pas injective.

Méthode :

1. pour montrer qu'une application $f : A \rightarrow B$ est surjective : pour tout élément $y \in B$, on résout l'équation en x : « $f(x) = y$ » et on prouve qu'il y toujours **au moins** une solution **dans** A (ne pas oublier de vérifier qu'une solution trouvée est bien dans A).
2. pour montrer qu'une application $f : A \rightarrow B$ n'est pas surjective : il suffit de trouver au moins un élément y dans B tel que l'équation $y = f(x)$ n'a pas de solution en x , ou a des solutions mais qui n'appartiennent pas à l'ensemble A .

1.3 Bijection

On dit que $f : A \rightarrow B$ est une **bijection** (application bijective) si f est, à la fois, injective et surjective, autrement si tout élément de B possède un (surjection) et un seul antécédent (injection) dans A par f .

Ceci se traduit par

$$f \text{ est bijective si : } \langle \forall y \in B, \exists! x \in A \mid y = f(x) \rangle.$$

On parle aussi de correspondance bi-univoque : chaque élément de A est associé à un élément unique de B par f (l'image) et réciproquement (l'antécédent).

Exemple : si E est un ensemble quelconque, l'application id_E est une bijection de E dans lui-même.

Exemple : soit $f :]+2, +\infty[\rightarrow]-\infty, -1]$, avec $f(x) = -2x + 3$. Pour tout réel $y \leq -1$, l'équation $y = -2x + 3$ possède une unique solution $x = \frac{-1}{2}(y - 3)$ et on montre sans problème que, sous la condition $y \leq -1$, la solution x trouvée vérifie $x \geq +2$. L'application f est donc bien bijective.

Méthode :

- pour montrer qu'une application $f : A \rightarrow B$ est bijective : soit on démontre successivement qu'elle est injective puis surjective, soit on résout, pour tout $y \in B$, l'équation d'inconnue x , « $y = f(x)$ ». On montre alors qu'il y a toujours **une et une seule solution** x , puis on n'oublie pas de vérifier que cette solution x est bien dans A .
- pour montrer qu'une application $f : A \rightarrow B$ n'est pas bijective : il suffit de prouver qu'elle n'est pas injective, **ou** qu'elle n'est pas surjective (se reporter aux méthodes précédentes).

1.4 Exercices

- On pose $f : A \rightarrow B$ avec $f(x) = x^2$. Préciser¹ dans tous les cas suivants si f est injective, surjective, bijective. Présenter les résultats dans un tableau, et dans le cas où f n'est pas injective ou surjective, donner simplement un argument frappant.

- $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}$ 2. $A = \mathbb{R}^+, B = \mathbb{R}$ 3. $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}^+$ 4. $A = \mathbb{R}^+, B = \mathbb{R}^+$
- $A = \mathbb{R}^-, B = \mathbb{R}^+$ 6. $A = \mathbb{R}^-, B = \mathbb{R}^-$

- On pose $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ avec $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Montrer que g n'est pas injective.
 - On pose $g :]+1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ avec $g(x) = x + \frac{1}{x}$. Montrer que g est injective, mais pas surjective.

- Soit l'ensemble $A = \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et l'application $f : \begin{cases} A & \longrightarrow \mathbb{C} \\ z & \longmapsto f(z) = \frac{z-1}{1-\bar{z}} \end{cases}$.

- Montrer que, pour tout $z \in A$, $|f(z)| = 1$: f est-elle surjective ?
- Résoudre l'équation $f(z) = 1$: f est-elle injective ?
- Soit a et b , deux complexes différents de 1. Trouver une condition géométrique simple portant sur les points A et B d'affixes a et b pour que $f(a) = f(b)$. On introduira I , le point d'affixe 1.
- Soit θ , un réel appartenant à $[0, 2\pi[$: résoudre l'équation $f(z) = e^{i\theta}$.
En déduire l'ensemble $f(A)$: ceci représente l'ensemble de toutes les images, par f , des éléments de A (i.e) $f(A) = \{f(z) \mid z \in A\} = \{Z \in \mathbb{C} \mid \exists u \in A, Z = f(u)\}$.

¹Commencer par tracer la courbe représentative de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

4. On considère l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & f(x, y) = (x + y, xy) \end{cases}$
Prouver, avec le minimum d'arguments, mais avec le maximum d'efficacité, que f n'est pas injective, ni surjective.
5. On définit les ensembles de complexes suivants $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ et $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.
On pose $h(z) = \frac{z - i}{z + i}$.
• Montrer que l'application $h : P \rightarrow D$ est bien définie : pour cela, il y a DEUX choses à prouver.
Tout d'abord, $h(z)$ est bien défini pour tout $z \in P$, puis ce $h(z)$ est bien un élément de D .
• Prouver alors que h est bijective : pour cela, il convient de prouver que pour tout $Z \in D$, l'équation « $h(z) = Z$ », d'inconnue z , possède UNE et UNE seule solution z dans l'ensemble P .
6. Soit \mathcal{P} le plan euclidien et soit D une droite du plan \mathcal{P} . On considère la projection orthogonale p_D sur la droite D .
- (a) On considère l'application p_D comme une application de \mathcal{P} dans \mathcal{P} . Cette application est-elle alors surjective ? Injective ?
- (b) On considère l'application p_D comme une application de \mathcal{P} dans D . Cette application est-elle alors surjective ? Injective ?
7. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{U} \\ x & \longmapsto & f(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} + i \frac{2x}{1 + x^2} \end{cases}$
où on rappelle que \mathbb{U} désigne l'ensemble des complexes de module 1.
- (a) Vérifier : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{i - x}{i + x}$.
- (b) Justifier que f est bien définie.
- (c) Soit $\theta \in]-\pi, +\pi]$: résoudre l'équation $f(x) = e^{i\theta}$, d'inconnue x .
- (d) f est-elle injective ? f est-elle surjective ?

2 Composée d'applications

2.1 Définition

Si A , B et C sont des ensembles, $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$ deux applications, alors pour tout $x \in A$, son image par f , $f(x)$ est un élément de B , ensemble de définition de g ; on peut donc calculer l'image par g de cet élément, autrement dit $g(f(x))$, qui est un élément de C . On note $g \circ f$ l'application ainsi construite, qui à tout élément x de A associe son image $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ dans C . On a donc $g \circ f : A \rightarrow C$: on l'appelle la **composée** de g et de f .

2.2 Propriétés

1. Si $f : A \rightarrow B$, alors $f \circ \text{id}_A = \text{id}_B \circ f = f$.
2. Si $f : A \rightarrow B$ et $g : C \rightarrow D$, alors $g \circ f$ n'a de sens que si $B \subset C$.
3. Si $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$, alors $g \circ f$ a un sens, mais $f \circ g$ n'a, en général pas de sens (sauf si $C \subset A$).
4. Si $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow A$, alors $g \circ f$ et $f \circ g$ ont un sens, mais cela n'a pas de sens de comparer $g \circ f$ et $f \circ g$. En effet, on a $g \circ f : A \rightarrow A$ et $f \circ g : B \rightarrow B$, les deux applications composées n'ont pas le même ensemble de définition, ni même d'arrivée, donc cela n'a pas de sens de les comparer !
5. Si $f : A \rightarrow A$ et $g : A \rightarrow A$, alors $g \circ f$ et $f \circ g$ ont un sens, mais on n'a **pas forcément** $g \circ f = f \circ g$! On dit que la **loi de composition** « \circ » n'est **pas commutative**.

Par exemple : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, avec $f(x) = x^2$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, avec $g(x) = x - 1 : \forall x \in \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x) = x^2 - 1$ et $(f \circ g)(x) = (x - 1)^2$. On a $(g \circ f)(0) = -1$ et $(f \circ g)(0) = +1$. Le fait que $(g \circ f)(0) \neq (f \circ g)(0)$ suffit à affirmer ici que $g \circ f \neq f \circ g$ (les applications ne sont pas égales car elles diffèrent sur au moins un élément).

Attention, il peut tout de même arriver, dans certains cas, que $g \circ f = f \circ g$: par exemple avec $f(x) = 2x$ et $g(x) = 5x$. Ou encore : avec $f(x) = 2x^2 - 1$ et $g(x) = 4x^3 - 3x$ (essayez!).

6. Si $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ et $h : C \rightarrow D$ alors les applications $h \circ (g \circ f) : A \rightarrow D$ et $(h \circ g) \circ f : A \rightarrow D$ existent, et sont égales !
Autrement dit, lorsque cela a un sens, on a toujours l'égalité : $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. On dit que la **loi de composition** « \circ » est **associative**. En effet, on vérifie sans problème que l'on a : $\forall x \in A$, $(h \circ (g \circ f))(x) = h(g(f(x))) = ((h \circ g) \circ f)(x)$.

2.3 Exercices

1. Soit $f : E \rightarrow E$, une application vérifiant $f \circ f = f$. Prouver le résultat suivant :
si f est injective ou surjective, alors nécessairement $f = \text{id}_E$, (ie) $\forall x \in E$, $f(x) = x$.
2. Soit $f : E \rightarrow E$, une application vérifiant $f \circ f \circ f = f$. Prouver l'équivalence suivant :
 $(f \text{ est injective}) \iff (f \text{ est surjective})$.

Que peut-on en déduire si f est injective ou surjective ?

2.4 Injection/Surjection et composition : cours-exercices

Soit $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$ deux applications. Les résultats qui suivent sont **à connaître**.

1. Montrer que l'on a l'implication : $(f \text{ et } g \text{ sont injectives}) \Rightarrow (g \circ f \text{ est injective})$.
Trouver un exemple simple montrant qu'en général, la réciproque est fausse.
2. Montrer que l'on a l'implication : $(f \text{ et } g \text{ sont surjectives}) \Rightarrow (g \circ f \text{ est surjective})$.
Trouver un exemple simple montrant qu'en général, la réciproque est fausse.
3. Montrer que $(g \circ f \text{ est injective}) \Rightarrow (f \text{ est injective})$.
Trouver un exemple simple montrant qu'en général, la réciproque est fausse.
4. Montrer que $(g \circ f \text{ est surjective}) \Rightarrow (g \text{ est surjective})$.
Trouver un exemple simple montrant qu'en général, la réciproque est fausse.

3 Bijection réciproque

3.1 Définition-propriétés

Si $f : A \rightarrow B$ est une application bijective, alors, pour tout élément $y \in B$, il existe un et un seul antécédent x dans A par f (tel que $y = f(x)$). On peut donc définir une application de $B \rightarrow A$ qui, à tout élément y de B associe son unique antécédent par f . Cette application s'appelle **bijection réciproque** de f , et est notée f^{-1} (attention, ce n'est pas l'inverse de f !!!).

On a $f^{-1} : B \rightarrow A$, ainsi que la propriété : $\forall x \in A, \forall y \in B : (y = f(x)) \Leftrightarrow (x = f^{-1}(y))$.

On en déduit : $f^{-1} \circ f = \text{id}_A$ et $f \circ f^{-1} = \text{id}_B$.

Méthode pour étudier la bijectivité d'une application et déterminer f^{-1} : soit $f : A \rightarrow B$.

Pour tout $y \in B$, on résout l'équation en x , « $y = f(x)$ ».

1. Si cette équation possède toujours une seule solution x dans A , alors f est bijective, et si l'on arrive à exprimer x en fonction de y , alors on obtient même l'expression de f^{-1} sous la forme $x = f^{-1}(y)$.
2. Si, pour au moins un y bien précis, cette équation possède soit zéro solution dans A , soit plus de deux solutions dans A , alors f n'est pas bijective.

Un résultat à connaître :

Si $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow A$ sont deux applications telles que $g \circ f = \text{id}_A$ **et** $f \circ g = \text{id}_B$, alors f et g sont nécessairement bijectives et réciproques l'une de l'autre, (ie) $f^{-1} = g$ et $g^{-1} = f$.

Démonstration : supposons que l'on ait $g \circ f = \text{id}_A$ et $f \circ g = \text{id}_B$. D'après ce qui précède :

$(g \circ f = \text{id}_A) \Rightarrow (g \circ f \text{ surjective}) \Rightarrow (g \text{ surjective})$.

Puis $(f \circ g = \text{id}_B) \Rightarrow ((f \circ g) \text{ injective}) \Rightarrow (g \text{ injective})$. Donc g est bijective.

En composant les deux membres de l'égalité $(g \circ f = \text{id}_A)$ par g^{-1} (c'est licite, car on vient de prouver l'existence de la réciproque g^{-1}), on obtient $g^{-1} \circ (g \circ f) = g^{-1} \circ \text{id}_A = g^{-1}$.

Par ailleurs $g^{-1} \circ (g \circ f) = (g^{-1} \circ g) \circ f = \text{id}_B \circ f = f$. Donc $g^{-1} = f$.

Attention : l'une seulement des deux égalités ne suffit pas à affirmer que les deux applications sont bi-

jectives. Pour s'en convaincre, en étudiant $f : \begin{cases} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } n=0 \\ n-1 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$,

on vérifie sans problème que $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{N}}$, mais que ni f , ni g n'est bijective et que $f \circ g \neq \text{id}_{\mathbb{N}}$.

3.2 Exercices

1. En reprenant $h(z) = \frac{z-i}{z+i}$ et les ensembles P et D définis précédemment, expliciter h^{-1} .
2. On pose $f(x) = \ln(1 - \ln x)$. Déterminer² des parties A et B de \mathbb{R} telles que $f : A \rightarrow B$ soit une bijection, et expliciter f^{-1} dans ce cas.

3. Soit $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$ sont deux applications bijectives.

Montrer que $g \circ f$ est bijective, puis que $\boxed{(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}}$ (à retenir).

4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ et $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$. Expliciter $g \circ f$ et $f \circ g$: quel enseignement peut-on en tirer ?

5. On considère l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & f(x, y) = (x + y, x - y) \end{cases}$.

A l'aide du déterminant : montrer que f est bijective et préciser l'expression de sa réciproque.

6. (a) On considère l'application $g : \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & g(x, y) = (x + y, x - y) \end{cases}$.

Montrer que g est injective, mais pas surjective.

- (b) On considère l'application $h : \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & h(x, y) = (2x - y, -x + y) \end{cases}$.

Montrer que h est bijective.

7. (a) Soit f une application involutive de A dans A , c'est à dire que l'on a : $f \circ f = \text{id}_A$.

Montrer qu'alors f est bijective et $f^{-1} = f$.

- (b) Soit s une symétrie orthogonale du plan euclidien. Montrer que s est bijective de \mathcal{P} dans lui-même et que $s^{-1} = s$.

- (c) On considère l'application $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ définie par : $f(x) = \frac{1}{x}$. Montrer que f est une bijection de \mathbb{R}^* dans lui-même.

- (d) Soit $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, l'application définie par :

$$\forall x \in [0, 1], g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ est un rationnel} \\ 1 - x & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que g est une bijection. Exhiber la réciproque g^{-1} .

²On rappelle le résultat : si f est une application continue et strictement monotone sur un intervalle I , alors f établit une bijection de I vers J , $J = "f(I)"$ représente l'ensemble image de l'ensemble I par f , (ie) $f(I)$ est l'ensemble de tous les $f(x)$ avec $x \in I$.

8. Soit E , A et B , trois ensembles, et deux applications $f : E \rightarrow A$ et $g : E \rightarrow B$.

On définit alors l'application

$$h : \begin{cases} E & \rightarrow & A \times B \\ x & \mapsto & h(x) = (f(x), g(x)) \end{cases} .$$

- Montrer que, si f OU g est injective, alors h est injective.
- Que peut-on dire si h est injective ?
- On suppose que f ET g sont surjectives : que peut-on dire de h ?
- Que peut-on dire si h est surjective ?

Indication : pour répondre à certaines questions, on pourra exhiber des contre-exemples en remplaçant A , B et E par des parties de \mathbb{R} .

9. On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs réelles. On considère \mathcal{D} , le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constituées des suites u vérifiant la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

On définit alors l'application f , définie sur \mathcal{D} et à valeurs dans \mathbb{R}^2 , qui, à toute suite de \mathcal{D} , associe le couple de réels formés par ces deux premiers termes (u_0, u_1) . Autrement dit :

$$f : \begin{cases} \mathcal{D} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ u & \mapsto & f(u) = (u_0, u_1) \end{cases} .$$

- Justifier que f est une application injective.
- Justifier que f est une application surjective.
- Soit φ et φ' , les deux racines de l'équation $X^2 = X + 1$, avec $\varphi' < \varphi$.
- Montrer que toute suite v définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = a\varphi^n + b\varphi'^n$ (avec a et b réels fixés) est un élément de \mathcal{D} .
- Réciproquement : justifier que toute suite de \mathcal{D} est nécessairement de cette forme (indication : analyse-synthèse...).
- Déterminer la suite $F = (F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{D} vérifiant $F_0 = 0, F_1 = 1$.
Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$.

10. (a) Pour $a \in \mathbb{N}$, on note S_a la somme $S_a = \sum_{k=0}^a k = 0 + 1 + 2 + \dots + a$.
Justifier que, pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, il existe un et un seul entier $a \in \mathbb{N}$ tel que :
 $S_a \leq N < S_{a+1}$.

(b) Montrer que l'application $\varphi : \begin{cases} \mathbb{N}^2 & \rightarrow & \mathbb{N} \\ (n, p) & \mapsto & \varphi(n, p) = n + \frac{(n+p)(n+p+1)}{2} \end{cases}$ est bijective.

Indication : on rappelle que $S_a = \frac{a(a+1)}{2}$.

(c) Déterminer l'antécédent de 2008.

11. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(y) + f(x + f(y)) = y + f(f(x) + f(f(y))).$$

(a) Montrer que f est injective.

(b) On pose $a = f(0) + f(f(0))$: comparer a et $f(a)$.

(c) En appliquant la propriété à x et à a , en déduire la forme de $f(x)$.

(d) Synthèse : en déduire la fonction f .

12. Soit E , un ensemble non vide. On note $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de E i.e l'ensemble des sous-ensembles de E .

Par exemple, si $E = \{a, b, c\}$, $\mathcal{P}(E) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E \}$.

Il est facile de prouver (le faire !) que, si E est un ensemble **fini** à n éléments, alors $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble à 2^n éléments, donc contient strictement plus d'éléments que E : il est clair que, dans ce cas, il n'est pas possible de construire une bijection entre E et $\mathcal{P}(E)$.

Mais lorsque E est un ensemble **infini** (comportant une infinité d'éléments), il est plus délicat de décrire $\mathcal{P}(E)$, et il n'est pas évident que le résultat soit encore vrai ! En effet, deux ensembles infinis peuvent être tels que l'un des deux est strictement inclus dans l'autre, mais néanmoins il peut exister une bijection de l'un vers l'autre : par exemple $] - 1, +1[\subset \mathbb{R}$, mais Argth réalise une bijection de $] - 1, +1[$ vers \mathbb{R} . On dit alors que les deux ensembles sont *équipotents*.

(a) Construire, simplement, une application $f : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ qui soit injective.

(b) Soit une application $g : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ qu'on suppose surjective.

On considère alors l'ensemble A constitué des éléments x de E qui n'appartiennent pas à leur image $g(x)$ ($g(x)$ est un élément de $\mathcal{P}(E)$, donc sous-ensemble de E), autrement dit

$$A = \{x \in E \mid x \notin g(x)\}.$$

Pourquoi peut-on considérer x_0 , élément de E tel que $g(x_0) = A$?

Cet élément x_0 appartient-il à A ? Conclure.