

Exercice 1 Etudier le lieu des points $M(t)$ $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t} \\ y(t) = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t} \end{cases}$.

On étudiera avec soin les branches infinies et les points multiples.

Exercice 2 On considère ici l'équation différentielle (E) : « $y' + 2xy = 1$ ».

1. De quel type d'équation différentielle s'agit-il ?

On désigne désormais par f l'une de ses solutions sur \mathbb{R} , **solution que l'on ne cherchera pas à exprimer**.

2. En fonction des valeurs des réels x_0 , a et b , quel est le nombre de solutions f de (E) vérifiant la condition initiale : $\begin{cases} f(x_0) = a \\ f'(x_0) = b \end{cases}$.

3. On désigne désormais par f la solution vérifiant $f(0) = 0$. Quelle est la valeur de $f'(0)$?

4. Prouver¹ que f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

5. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(R) \quad \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n+2)}(x) = -2xf^{(n+1)}(x) - 2(n+1)f^{(n)}(x).$$

6. (a) Justifier que f admet, en 0, un développement limité à tout ordre p ($p \in \mathbb{N}$). On écrit un tel développement limité au moyen d'une suite de réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^p a_k x^k + o(x^p).$$

(b) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, a_{2k} = 0$.

(c) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, a_{2k+1} = \frac{(-4)^k k!}{(2k+1)!}$.

(d) Tracer l'allure de la courbe représentative Γ de f au voisinage de 0.

7. On définit sur \mathbb{R} la fonction D par : $D(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$.

(a) Justifier que D est une fonction dérivable sur \mathbb{R} , et que D est une solution de l'équation différentielle (E) .

(b) Etudier la parité de D .

(c) Déterminer, à l'aide de D , toutes les solutions de (E) .

8. Montrer l'existence d'une unique solution impaire de (E) .

9. Existe-t'il des solutions paires à l'équation (E) ?

Exercice 3 *N'aborder cet exercice, très instructif au demeurant, que si les deux premiers ont été résolus dans leur intégralité.*

On se propose de résoudre l'équation différentielle, du 1^{er} ordre, mais non linéaire :

$$(E) \quad \ll y' = \text{sh}(y) \gg.$$

¹On rappelle qu'on dit qu'une fonction g est de classe C^∞ sur un intervalle I si elle est indéfiniment dérivable, ce qui revient à dire qu'elle est k fois dérivable pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$.

Il n'est pas possible, en général, avec les équations différentielles non linéaires, de savoir à l'avance sur quel intervalle les solutions (si elles existent ?) vont être définies.

1. Déterminer les solutions **constantes** de l'équation (E) : sur quel intervalle le plus grand possible peut-on les définir ?

Pour la détermination des solutions non constantes, on raisonne par analyse-synthèse.

2. ANALYSE

On suppose l'existence d'une solution **non constante** y de l'équation, définie et dérivable sur un certain intervalle I . L'objectif est de déterminer, au mieux, y et I .

- (a) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}(x) = \frac{2\operatorname{th}(\frac{x}{2})}{1 - \operatorname{th}^2(\frac{x}{2})}$.
- (b) On pose, pour tout $x \in I$: $g(x) = \operatorname{th}\left(\frac{y(x)}{2}\right)$. Déterminer une équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre dont g est solution. Résoudre cette équation différentielle.
- (c) On note k la constante issue de la résolution de l'équation différentielle de la question précédente (k intervient dans la définition de g). Peut-on avoir $k = 0$?
- (d) En déduire la forme de y .
- (e) Montrer que $I \subset] - \infty, -\ln(|k|)[$.

3. SYNTHÈSE

Réciproquement : soit $k \in \mathbb{R}^*$. Montrer que, si I est un intervalle inclus dans $] - \infty, -\ln(|k|)[$ et si y est une fonction du type de celles trouvées en 2d, alors y est solution de l'équation différentielle « $y' = \operatorname{sh}(y)$ » sur l'intervalle I . Conclure quant à la résolution de (E) .

4. Questions subsidiaires

- (a) Est-il possible que des courbes intégrales différentes de (E) soient sécantes ?
- (b) Tracer, sur un même schéma, l'allure générale de quelques solutions de (E) (en prenant par exemple $k = 2, k = -2, k = 3, k = \frac{1}{2}$).
- (c) Montrer que, si y est une solution de (E) , alors $z = 2y$ est une solution de l'équation différentielle du 2nd ordre (F) « $z'' = \operatorname{sh}(z)$ ».