

**Exercice 1** Le plan est rapporté au repère orthonormé  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- Soit  $\mathcal{P}$  la courbe d'équation polaire  $\rho(\theta) = \frac{1}{1 - \cos \theta}$ .
  - Reconnaître la courbe  $\mathcal{P}$  et donner ses éléments caractéristiques.
  - La tracer dans le plan.
- A tout point  $M$  de  $\mathcal{P}$ , on associe le point  $P$ , projeté orthogonal de  $M$  sur l'axe  $Ox$ . Soit  $N$  le symétrique de  $O$  par rapport à  $P$ , et  $H$  le projeté orthogonal de  $O$  sur la droite  $(MN)$ . On note  $\Gamma$  l'ensemble des points  $H$  lorsque  $M$  décrit  $\mathcal{P}$ .
  - L'ensemble  $\Gamma$  possède une symétrie évidente, laquelle et pourquoi?
  - Déterminer une équation normale de la droite  $(MN)$  sous la forme  $x \cos \varphi + y \sin \varphi = p(\varphi)$  où  $\varphi$  dépend de  $\theta$  de manière simple.
  - En déduire qu'une équation polaire de  $\Gamma$  est
 
$$r(\varphi) = \frac{-\sin 2\varphi}{1 + \sin \varphi}.$$
  - Justifier qu'une équation polaire de  $\Gamma$  est également
 
$$r(\varphi) = \frac{\sin 2\varphi}{1 - \sin \varphi}.$$
- Tracer la courbe  $\Gamma$  : on étudiera en particulier les branches infinies.
- Pour quelle valeurs de  $\varphi$ , la tangente à  $\Gamma$  est-elle perpendiculaire à  $(OH)$  ?

**Exercice 2** Soit  $k$  un paramètre réel, on considère, dans le repère orthonormé  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ , la conique  $\mathcal{C}_k$  d'équation

$$x^2 + y^2 - 2kxy + 2(kx - y) = 0.$$

- Préciser le type de la conique  $\mathcal{C}_k$ .
- Montrer les  $\mathcal{C}_k$  sont des coniques ayant toutes le même centre  $\Omega$  (lorsque celui-ci existe).
- Donner une équation cartésienne de  $\mathcal{C}_k$  dans le repère  $\mathcal{R}' = (\Omega, \vec{i}', \vec{j}')$ .
- Déterminer un angle  $\alpha$  tel qu'une équation de  $\mathcal{C}_k$  soit «plus simple» dans  $\mathcal{R}_\alpha = (\Omega, \vec{u}_\alpha, \vec{v}_\alpha)$ , le repère tourné d'angle  $\alpha$ .
- Préciser les éléments caractéristiques de  $\mathcal{C}_k$  (notamment l'axe focal). Faire un schéma dans chaque cas.

**Exercice 3** Un sangaku élémentaire

On considère une ellipse  $\mathcal{E}$  de demi grand axe  $a$  et de demi petit axe  $b$ . On tourne cette ellipse d'un quart de tour autour de centre, et on suppose que l'on peut inscrire deux carrés comme indiqué sur la figure ci dessous. Calculer le rapport  $\frac{b}{a}$ .

