

Exercice 1 Dans ce problème, on construit deux suites de rationnels qui convergent vers $\sqrt{2}$, puis on compare leurs vitesses de convergence.

1ère partie : une première suite

On considère les suites $p = (p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $q = (q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par

$$\begin{cases} p_0 = 1 \\ q_0 = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \text{pour tout } n \geq 0, \quad \begin{cases} p_{n+1} = p_n + 2q_n \\ q_{n+1} = p_n + q_n \end{cases}$$

- Calculer p_i et q_i pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.
 - Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les nombres p_n et q_n sont des entiers strictement positifs.
 - Justifier que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $p_n \geq q_n$.
 - Etudier la monotonie des deux suites p et q , ainsi que leurs limites éventuelles.
- On définit une suite réelle $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{p_n}{q_n}$.
 - Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n (on trouvera $u_{n+1} = h(u_n)$ où h est une fonction simple).
 - Prouver, directement : pour tout entier $n \geq 0$, $\left| u_{n+1} - \sqrt{2} \right| \leq \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \left| u_n - \sqrt{2} \right|$.
En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - Pour quelles valeurs de n est-on certain que u_n est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-9} près ?
On pourra utiliser, dans les majorations, $0 < \sqrt{2} - 1 < \frac{1}{2}$.
- Vérifier qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+2} = ap_{n+1} + bp_n$.
 - En déduire l'expression du terme général de la suite (p_n) .
 - De même, exprimer le terme général de la suite (q_n) .
Retrouver le résultat de la question 2b.
- Une autre méthode pour trouver u_n : l'équation $h(x) = x$ possède deux solutions x_1 et x_2 avec $x_1 < x_2$.
On pose $g_n = \frac{u_n - x_2}{u_n - x_1}$: vérifier que la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Montrer que ce résultat permet de retrouver l'expression de u_n trouvée à la question 3c.

2ème partie : une seconde suite

On considère la suite réelle $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$v_0 = 1, \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \frac{1}{2} \left(v_n + \frac{2}{v_n} \right).$$

- Calculer v_i pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.
- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est bien défini, et est un nombre rationnel appartenant à l'intervalle $[1, 2]$.
- Observer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(v_n - \sqrt{2})^2}{2v_n}$.
- En déduire que (v_n) converge vers $\sqrt{2}$.
Indication : en posant $\delta_n = |v_n - \sqrt{2}|$, commencer par montrer qu'on a $0 \leq \delta_n \leq 2 \left(\frac{\delta_0}{2} \right)^{2^n}$.
- Pour quelles valeurs de n est-on certain que v_n est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-9} près ?

3^{ème} partie : comparaison des vitesses de convergence

- Donner les valeurs décimales approchées de u_3 , v_3 et $\sqrt{2}$ à la précision 10^{-6} (à l'aide de la calculatrice).
- On pose $t_n = \frac{v_n - \sqrt{2}}{u_n - \sqrt{2}}$.
 - Exprimer t_{n+1} en fonction de t_n , u_n et v_n .
Vérifier qu'on a $t_{n+1} = t_n \times \varepsilon_n$ où (ε_n) est une suite de limite nulle.
 - Montrer que la suite $(|t_n|)_{n \geq 0}$ est décroissante à partir d'un certain rang.
 - En déduire la limite de la suite (t_n) .
- En posant $\Delta_n = |u_n - \sqrt{2}|$: que peut-on en conclure concernant la comparaison des suites (Δ_n) et (δ_n) ? Quelle est celle des deux suites (u_n) et (v_n) qui converge le plus rapidement vers $\sqrt{2}$?
- Compléments (facultatif)
 - En repartant de la question 2a : montrer que, pour toute constante $C \in]0, 1[$, il existe une constante $\lambda > 0$ et un rang N_0 à partir duquel on a $|t_n| \leq \lambda C^n$.
 - En déduire que, pour toute constante $D \in]0, 1[$, on a : $|t_n| \ll D^n$ (i.e) $|t_n| = o(D^n)$: autrement dit, la suite $(|t_n|)$ est négligeable devant toute suite géométrique de limite nulle.

Exercice 2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère Γ_n , la courbe représentative d'équation $y = \cos^n(x)$ tracée sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ dans le repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. On note d_n = la distance de O à Γ_n : par définition, c'est la borne inférieure de l'ensemble des longueurs OM avec M parcourant Γ_n . Ainsi, $d_n = d(O, \Gamma_n) = \inf\{OM \mid M \in \Gamma_n\}$. Graphiquement : on a l'impression que d_n est une quantité qui tend vers zéro lorsque n tend vers $+\infty$. Le but de cet exercice est de prouver ce résultat, et même mieux, de trouver un équivalent simple de d_n (et ceci sans pouvoir calculer explicitement cette quantité d_n).

- Vérifier que le calcul de d_n revient à chercher la borne inférieure, sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, de la fonction g_n définie par $g_n(t) = t^2 + \cos^{2n}(t)$.
- On pose $\varphi(t) = g'_n(t)$ (dérivée de g_n) : calculer les dérivées première et seconde de la fonction φ .
En déduire l'existence d'un unique élément dans $]0, \frac{\pi}{2}[$, que l'on notera x_n , tel que φ est négative sur $]0, x_n[$, nulle en x_n et positive sur $]x_n, \frac{\pi}{2}[$.
- En déduire que $d_n^2 = g_n(x_n)$, où x_n est l'unique élément de $]0, \frac{\pi}{2}[$ vérifiant $\cos^{2n-1}(x_n) = \frac{x_n}{n \sin(x_n)}$.
On va désormais étudier le comportement de la suite $(x_n)_{n \geq 1}$.
- Démontrer que, pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$: $\frac{2}{\pi}t \leq \sin(t) \leq t$.
Utiliser ce résultat pour justifier l'équivalent $\cos(x_n) \sim (\frac{1}{n})^{\frac{1}{2n-1}}$ (lorsque $n \rightarrow +\infty$).
- En déduire la limite de x_n , puis l'équivalent $\ln(\cos(x_n)) \sim -\frac{\ln(n)}{2n}$, et finalement $x_n \sim \sqrt{\frac{\ln n}{n}}$.
- Justifier qu'on a : $\cos^{2n}(x_n) \sim \frac{1}{n}$. Enfin, donner un équivalent simple de d_n .