

PROBLEME**PREMIÈRE PARTIE**

On considère un \mathbb{K} -espace vectoriel E , et deux projecteurs p et q vérifiant $p \circ q = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
 On définit l'endomorphisme $r = p + q - q \circ p$.
 Dans tout le problème, id désigne l'application identité de E ($\text{id} = \text{Id}_E$).

1. *Quelques rappels*

- (a) Si φ désigne un projecteur de E , rappeler une propriété caractérisant les éléments de $\text{Im}(\varphi)$ (on ne demande pas de démonstration).
 (b) Si u et v sont deux endomorphismes de E , montrer qu'on a l'équivalence :

$$u \circ v = 0_{\mathcal{L}(E)} \Leftrightarrow \text{Im}(v) \subset \text{Ker}(u).$$

2. Montrer que r est un projecteur.

Exprimer $r \circ p$, $p \circ r$, $r \circ q$ et $q \circ r$ en fonction de p et de q (on trouve des expressions simples...)

3. Montrer que $\text{Ker}(r) = \text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$.4. Montrer que $\text{Im}(r) = \text{Im}(p) \oplus \text{Im}(q)$.**DEUXIÈME PARTIE**

On considère dans cette partie, le \mathbb{R} -espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$.
 On définit $F = \{(x, y, z) \in E \mid x - y + z = 0\}$, le vecteur $\vec{g} = (1, 1, 1)$ et $G = \text{vect}(\vec{g})$.
 On définit également $\vec{k} = (1, 2, 1)$, $K = \text{vect}(\vec{k})$, $\vec{l}_1 = (1, 0, -1)$, $\vec{l}_2 = (-2, 1, 1)$ et $L = \text{vect}(\vec{l}_1, \vec{l}_2)$.

- Déterminer une famille génératrice du sous-espace F et un système d'équations caractéristiques du sous-espace L .
- Montrer que $E = F \oplus G$ et que $E = K \oplus L$.
- On note p le projecteur sur G parallèlement à F (i.e $G =$ la base et $F =$ la direction de p), et q le projecteur sur K parallèlement à L .
 Déterminer les expressions analytiques de p et q .
- Vérifier que $p \circ q = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et déterminer l'expression analytique du projecteur $r = p + q - q \circ p$.
- On considère un réel $\lambda \notin \{-1, +1\}$ et on définit l'endomorphisme $u = 2p + (\lambda - 1)\text{id}$.
 - Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$: déterminer l'expression de l'endomorphisme u^n en fonction de p et de id .
 - Montrer que u est un automorphisme de E et déterminer sa réciproque en fonction de p et de id .

TROISIÈME PARTIE

On considère dans cette partie le \mathbb{R} -espace vectoriel $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
 On note $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \varphi(x) = 1 \end{cases}$, la fonction constante égale à 1.
 On note \mathcal{P} , l'ensemble des fonctions paires, \mathcal{I} , l'ensemble des fonctions impaires et on pose également $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$ et $G = \text{vect}(\varphi)$.

1. Vérifier que \mathcal{P} , \mathcal{I} , F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .
2. Montrer que $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.
On précisera, pour toute fonction $f \in E$, la fonction $q(f)$ où q est le projecteur sur \mathcal{I} parallèlement à \mathcal{P} .
3. Montrer que $E = F \oplus G$.
On précisera, pour toute fonction $f \in E$, la fonction $p(f)$ où p est le projecteur sur G parallèlement à F .
4. Vérifier que $p \circ q = 0_{\mathcal{L}(E)}$, et pour toute fonction $f \in E$, déterminer la fonction $r(f)$ (où r désigne, bien entendu, le projecteur $r = p + q - q \circ p$).
5. Pour un entier $n \geq 2$ et $f \in E$, déterminer la fonction $g = (p - q)^n(f)$.

QUATRIÈME PARTIE

On considère dans cette partie le \mathbb{R} -espace vectoriel $E = \mathbb{C}$. On définit l'application

$$p : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ z & \longmapsto p(z) = \bar{z} - jz \end{cases}$$

où, bien entendu j désigne la célèbre racine cubique de l'unité ($j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$).

1. Montrer que p est un endomorphisme de E .
2. Montrer que p est un projecteur de E .
3. Déterminer $\text{Ker}(p)$.
Vérifier que c'est une droite vectorielle (c'est à dire de la forme $\text{Ker}(p) = \text{vect}\{z_0\}$ où $z_0 \in \mathbb{C}$).
4. Déterminer $\text{Im}(p)$. Vérifier que c'est une droite vectorielle.
5. Soit ψ , une forme linéaire **non-nulle** sur E (i.e $\psi \in E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ et $\psi \neq 0_{E^*}$).

On définit l'application $q : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ z & \longmapsto q(z) = \psi(z)j \end{cases}$, où l'on a toujours $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

- (a) Vérifier que q est un endomorphisme de E , puis que $p \circ q = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
- (b) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur ψ pour que q soit un projecteur.
- (c) Si cette condition est vérifiée i.e si q est un projecteur, montrer que $r = \text{id}$ (où, bien entendu, $r = p + q - q \circ p$).
- (d) On note \mathcal{S} l'ensemble des formes linéaires ψ vérifiant la condition trouvée ci-dessus.
 \mathcal{S} est-il un espace vectoriel ?