

PROBLEME

Etude des suites de *Rudin-Shapiro* (inspiré librement d'un sujet classé $X - PC$ 2006)

On définit les deux suites de polynômes par

$$\begin{aligned} P_0(X) &= Q_0(X) = 1 \\ P_{n+1}(X) &= P_n(X) + X^{2^n} Q_n(X) \\ Q_{n+1}(X) &= P_n(X) - X^{2^n} Q_n(X) \end{aligned}$$

- Déterminer $P_n(X)$ et $Q_n(X)$ pour $n = 1, 2, 3$.
- Montrer que les coefficients de P_n et Q_n valent tous 1 ou -1 , préciser les degrés de ces deux polynômes.
- On pose $u_n = P_n(1)$ et $v_n = Q_n(1)$, montrer que les suites $(u_{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$ sont géométriques. En déduire $P_{2^n}(1)$, $P_{2^{n+1}}(1)$, $Q_{2^n}(1)$, $Q_{2^{n+1}}(1)$ lorsque $n \in \mathbb{N}$.
- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}^*, P_n(z) P_n\left(\frac{1}{z}\right) + Q_n(z) Q_n\left(\frac{1}{z}\right) = 2^{n+1}$
- Soit z de module 1, calculer $|P_n(z)|^2 + |Q_n(z)|^2$. En déduire que si $|z| = 1$ alors $|P_n(z)| \leq 2^{\frac{n+1}{2}}$ et $|Q_n(z)| \leq 2^{\frac{n+1}{2}}$.
- Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}^*, Q_n(z) = (-1)^n z^{2^n-1} P_n\left(-\frac{1}{z}\right)$.
- Déterminer $P_n(-1)$ et $Q_n(-1)$.
- Localisation des racines de P_n et Q_n**

(a) Etude d'un exemple : racines de P_2 .

- Montrer que le polynôme P_2 admet une unique racine réelle, on la notera α . Donner une valeur approchée à 10^{-2} de α .
- On note β et γ les deux autres racines de P_2 , quelle relation existe-t-il entre β et γ ?
- Exprimer $|\beta|^2$ en fonction de α et vérifier ainsi que les trois racines de P_2 ont toutes un module compris entre $\frac{1}{2}$ et 2. En déduire que les racines de Q_2 sont aussi, en module, comprises entre $\frac{1}{2}$ et 2.

(b) Soit $T(X) = t_0 + t_1X + \dots + t_dX^d$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré d exactement, $d \geq 1$, on désire prouver que ses racines sont toutes majorées en module par la quantité $1 + \max_{0 \leq i \leq d-1} \left| \frac{t_i}{t_d} \right|$.

- Soit z une racine de T telle que $|z| > 1$, en écrivant que $z^d = -\frac{t_0}{t_d} - \frac{t_1}{t_d}z - \dots - \frac{t_{d-1}}{t_d}z^{d-1}$, montrer que

$$|z| - 1 \leq M \frac{|z|^d - 1}{|z|^d} \text{ où } M = \max_{0 \leq i \leq d-1} \left| \frac{t_i}{t_d} \right|$$

En déduire l'inégalité désirée dans ce cas.

(ii) Conclure.

(c) Montrer que les racines de $P_n(X) Q_n(X)$ ont toutes un module compris entre $\frac{1}{2}$ et 2.

