PROBLEME Le but de ce problème est d'étudier, et d'exploiter, quelques propriétés de fonctions de classe C^∞ à dérivées toutes positives ou nulles.
Soit $\alpha \in]0,+\infty[\cup\{+\infty\}$: α est donc un réel strictement positif ou égal à $+\infty$ (on aurait envie d'écrire $\alpha \in]0,+\infty]$...).
On note alors E_α l'ensemble des fonctions f de classe C^∞ sur $[0,\alpha[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et telles que, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$: $\forall x\in[0,\alpha[,\ f^{(n)}(x)\geq 0$.

I : quelques exemples

1. Justifier que la fonction exp appartient à $E_{+\infty}$.
2. Montrer que la fonction $g : x \mapsto -\ln(1-x)$ est élément de E_1.
3. A partir de la relation $\tan' = 1+\tan^2$ et à l'aide d'une récurrence forte, prouver que la fonction tangente est un élément de l'ensemble $E_{\frac{\pi}{2}}$.
4. Donner un exemple simple de fonction h de classe C^∞ qui n'appartient à aucun E_α.

II : problèmes de stabilité

1. (a) Prouver que la dérivée de tout élément de E_α est aussi un élément de E_α : autrement dit, prouver que E_α est stable par dérivation.
   (b) Y-a-t'il une réciproque ? Autrement dit, si f' appartient à E_α, a-t'on nécessairement f dans E_α ?
2. Montrer que E_α est stable par produit.
3. Montrer que E_α n'est pas un sous-espace vectoriel de l'espace $C^\infty([0,\alpha[,\mathbb{R})$.

III : développement en série entière des éléments de E_α

Soit une fonction $f\in E_\alpha$, fixée.

1. Montrer que, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, on a :
$$\text{« } \forall x\in[0,\alpha[,\quad f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\int_0^x\frac{(x-u)^n}{n!}f^{(n+1)}(u)\mathrm{d}u \text{ ».}$$
<u>Indication</u> : on raisonnera par récurrence simple sur n pour prouver la proposition précédente, en appliquant une intégration par parties bien choisie. Cette formule s'appelle «*formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral*», que l'on reverra dans le cours sur l'intégration.
2. Déduire directement, à l'aide de ce qui précède et d'un changement de variables simple, que l'on a aussi, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$:
$$\text{« } \forall x\in[0,\alpha[,\quad f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+x^{n+1}\int_0^1\frac{(1-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(xt)\mathrm{d}t \text{ ».}$$
3. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, et pour tout $x\in[0,\alpha[$: on pose $R_n(x)=\displaystyle\int_0^1\frac{(1-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(xt)\mathrm{d}t$.
Montrer que, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, la fonction R_n est croissante sur l'intervalle $[0,\alpha[$.
4. En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, pour tous $x,y\in[0,\alpha[$ tels que $x<y$:
$$0\leq f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\leq\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1}f(y).$$
5. Montrer enfin que, pour tout $x\in[0,\alpha[$: $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right)$.
Cette relation s'appelle le *développement en série entière de la fonction f au voisinage de 0* (voir programme de *spé*).

6. Quelques applications :
   (a) Que vaut $\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)$ pour un $x \geq 0$?
   (b) Compléter la formule : $\ln(2) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{?}{?}\right)$.

IV : exemple de la fonction arcsinus

1. (a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe un polynôme P_n dans $\mathbb{R}[X]$ tel que :
$$\forall x \in]-1,+1[, \quad \mathrm{Arcsin}^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}.$$
   Indication : procéder par récurrence sur $n \geq 1$.
   Montrer ensuite que, pour $n \geq 1$, le polynôme P_n solution est unique.

   (b) Vérifier, pour tout $x \in]-1,+1[$, l'égalité : $(1-x^2)\mathrm{Arcsin}''(x) = x\mathrm{Arcsin}'(x)$.
   En déduire, à l'aide de la formule de Leibniz, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'égalité polynômiale :
$$P_{n+2} = (2n+1)XP_{n+1} + n^2(1-X^2)P_n.$$

   (c) En déduire que la fonction Arcsin est élément de E_1.

2. (a) A l'aide la relation polynômiale de 1b, déterminer une expression simplifiée de $P_n(0)$ pour tout entier $n \geq 1$. En déduire explicitement $\mathrm{Arcsin}^{(n)}(0)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Une autre méthode (vérification) : déterminer, en primitivant un développement limité usuel au voisinage de 0, un développement limité à tout ordre de la fonction Arcsin au voisinage de 0. Retrouver alors $\mathrm{Arcsin}^{(n)}(0)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

   (c) Prouver enfin que, pour tout réel $x \in [0,1[$:
$$\mathrm{Arcsin}(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\frac{x^{2k+1}}{2^{2k}(2k+1)}\right).$$

   (d) Justifier **proprement** que la formule précédente est toujours vraie si $x \in]-1,0[$.

3. Quelques applications :
   (a) Montrer que $\pi = \lim_{n\to+\infty}\left(3\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\frac{1}{16^k(2k+1)}\right)$.
   Donner, en exploitant III.4, une méthode permettant d'obtenir une valeur approchée de π à 10^{-9} près (on admet $\pi \leq 4$).

   (b) Trouver une formule du même genre ayant pour limite $\pi\sqrt{2}$.