$\boxed{\textbf{PROBLEME}}$ Etude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère l'application f et l'ensemble $\mathcal{E}_\lambda$ définis respectivement par

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \longmapsto & nXP(X) - X(X-1)P'(X) \end{array} \right. \qquad \text{et} \quad \mathcal{E}_\lambda = \{P \in \mathbb{R}_n[X], \, f(P) = \lambda P\}$$

Le but du problème est de montrer que f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et de déterminer l'ensemble $Sp(f)$, dit *spectre de* f, des réels λ tels que $\mathcal{E}_\lambda$ soit non trivial (i.e non réduit au vecteur nul). Puis, pour les valeurs de λ du spectre, de déterminer une base de chaque $\mathcal{E}_\lambda$.

PARTIE I : l'application f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$: montrer que $\deg(f(P(X))) \leq n$.
2. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$: justifier que $\mathcal{E}_\lambda$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$, et plus précisement le noyau d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ que l'on précisera.

PARTIE II : description du spectre de f.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$: on suppose qu'il existe un P non nul dans $\mathcal{E}_\lambda$. On note $p = \deg(P)$.

1. Déterminer p.
2. Vérifier que :
   - 0 est racine de P sauf éventuellement lorsque $\lambda = 0$.
   - 1 est racine de P sauf éventuellement lorsque $\lambda = n$.
3. On note k et l les ordres de multiplicité de 0 et 1 dans P respectivement (avec k et l éventuellement nuls lorsque 0 ou 1 ne sont pas racines). Soit Q le quotient de la division de P par $X^k(1-X)^l$, alors
   $$P(X) = X^k(1-X)^l Q(X) \qquad \text{avec} \qquad Q(0) \neq 0 \text{ et } Q(1) \neq 0$$
   (a) En utilisant la relation vérifiée par P, montrer que Q vérifie
   $$(n-k-l)XQ(X) + (k-\lambda)Q(X) - X(X-1)Q'(X) = 0$$
   (b) En déduire $n = k + l$ et $\lambda = k$, puis que Q est constant.
4. Réciproquement : si $P(X) = X^k(1-X)^{n-k}$ où $\cdots \leq k \leq \cdots$ (compléter les $\cdots$), vérifier que $f(P) = kP$.
5. Décrire alors l'ensemble $Sp(f)$ et donner une base de $\mathcal{E}_\lambda$ pour chaque $\lambda \in Sp(f)$.
6. f est-il un automorphisme de E ?

PARTIE III : construction d'une base $\mathbb{R}_n[X]$.

On considère la famille $\mathcal{B} = (T_k)_{0\leq k\leq n}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ définie par

$$\forall k \in \{0,\cdots,n\}\,,\ T_k = X^k(1-X)^{n-k}$$

1. Montrer que la famille $\mathcal{B}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. La famille $\mathcal{B}$ est-elle une base de $\mathbb{R}_n[X]$?
3. A l'aide de la famille $\mathcal{B}$, déterminer une base de l'image $\mathrm{Im}(f)$, puis le rang de f et une base de son noyau $\ker(f)$.
4. Rappeler la définition de la base canonique $\mathcal{C} = (U_0,\cdots,U_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. On se propose de déterminer les coordonnées des vecteurs de la base canonique dans $\mathcal{B}$.
   (a) Soit $x \neq 0$ et $i \in \{0,\cdots,n\}$ montrer que
   $$x^i = \sum_{k=0}^{n-i}\binom{n-i}{k}x^{n-k}(1-x)^k$$
   On pourra développer, à l'aide de la formule du binôme, $\left(1+\dfrac{1-x}{x}\right)^{n-i}$.
   (b) En déduire les coordonnées de U_i dans la base $\mathcal{B}$. Où peut-on lire celles-ci dans le triangle de Pascal ?

PARTIE V : une application numérique.

On prend désormais $n = 3$. On considère le polynôme $P = 2 - 7X + 12X^2 - 4X^3$.

1. Déterminer $[P]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ \delta\end{pmatrix}$ et $[P]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}$, respectivement les coordonnées de P sur la base $\mathcal{C}$ et la base $\mathcal{B}$.
2. Déterminer, avec le *minimum* de calculs, voire sans, une expression de $f(P)$.
3. Justifier, sans calcul, que l'équation « $f(Q) = P$ » n'a pas de solution $Q \in E$.
4. Montrer qu'il existe une valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour laquelle l'équation « $f(Q) = P - \lambda T_0$ » possède au moins une solution $Q \in E$. Donner alors une description complète de l'ensemble de ces solutions. Vérifier que, parmi ces solutions, il y en a une, et une seule de degré deux.
5. Résoudre l'équation différentielle suivante, sur l'intervalle $I =]0,1[$:
   $$\text{« } x(1-x)y' + 3xy = x + 6x^2 - 2x^3 \text{ ».}$$