PROBLEME 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}$: montrer que
$$\int_0^1 t^n (1-t)^n \, \mathrm{d}t = \frac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$$
Première méthode : on pourra calculer, de manière générale, $B(p,q) = \displaystyle\int_0^1 t^p (1-t)^q \, \mathrm{d}t$ pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. Commencer par établir une relation entre $B(p,q)$ et $B(p+1, q-1)$, puis en déduire une expression de $B(p,q)$ après avoir calculé $B(N,0)$.
Seconde méthode *(le coin des malins)* : pour calculer $B(p,q)$ directement, écrire la formule de Taylor-Lagrange, avec reste intégral, appliquée à une fonction bien choisie f de classe C^∞, entre 0 et 1, à un ordre N.....

2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par
$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{(2k+1)\binom{2k}{k}}$$
Donner une expression intégrale de u_n.

3. Montrer que
$$u_n = \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \frac{(2t(1-t))^{n+1}}{2t^2 - 2t + 1} \mathrm{d}t$$

4. Déterminer le maximum de $t(1-t)$ pour $t \in [0,1]$.

5. En déduire que
$$\left| u_n - \frac{\pi}{2} \right| \leq \frac{1}{2^n}$$
Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

6. On pose
$$\beta_n = \frac{2^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$$
Calculer pour $n \geq 0$, en fonction de n, $\dfrac{\beta_{n+1}}{\beta_n}$.

7. Exprimer pour $n \geq 2$, en fonction de βn,
$$u_n - u_{n-1} \quad \text{et} \quad u_{n-1} - u_{n-2}.$$

8. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence
$$\begin{aligned} u_0 &= 1 \\ u_1 &= \frac{4}{3} \\ \forall n \geq 2, \quad (2n+1)\, u_n - (3n+1)\, u_{n-1} + n u_{n-2} &= 0 \end{aligned}$$

9. Quel terme calculer pour obtenir π à 10^{-10} près ?
   Quelle méthode utiliser pour calculer ce terme ?

10. Thème de recherche : en remplaçant le 2^n par x^n où x est convenablement choisi, peut-on trouver des suites qui convergent vers $\pi\sqrt{3}$, $\ln 2$?
    Pour cela, on pose
$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{(2k+1)\binom{2k}{k}}$$
    Justifier que
$$u_n(x) - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{xt^2 - xt + 1} = -x^{n+1} \int_0^1 \frac{(t(1-t))^{n+1}}{xt^2 - xt + 1} \mathrm{d}t$$
    et calculer la première intégrale pour $|x| < 4$ selon le signe de $x \neq 0$.

PROBLEME 2

Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ on note $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. On considère le sous ensemble E de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ formé des matrices $A = (a_{i,j})_{1\leq i\leq 3,\ 1\leq j\leq 3}$ pour lesquelles les six nombres réels
$$\sum_{j=1}^{3} a_{i,j} \text{ pour } 1 \leq i \leq 3 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{3} a_{i,j} \text{ pour } 1 \leq j \leq 3$$
   sont égaux. En d'autres termes, la somme des coefficients d'une ligne ou d'une colonne est constante.
   Par exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in E$.
   On note, si $A \in E$, $d(A)$ cette valeur commune (dans notre exemple cette valeur est 6).
   (a) Prouver que E est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que l'application $d : M \mapsto d(M)$ est une forme linéaire sur E.
   (b) Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$: montrer l'équivalence
$$(A \in E) \Longleftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{R},\ AJ = JA = \lambda J)$$
   En déduire que pour tout $(A, B) \in E^2$, le produit AB est aussi dans E. Que vaut alors $d(AB)$?
   (c) Soit A une matrice inversible de E : montrer que $d(A) \neq 0$, puis que $A^{-1} \in E$.
   Comparer $d(A)$ et $d(A^{-1})$.

(d) Soit $A \in E$: on pose
$$B = \frac{d(A)}{3} J \quad \text{et} \quad C = A - B$$
Calculer BC et CB,.

En déduire, si $p \in \mathbb{N}^*$, la valeur de A^p en fonction de B^p et de C^p.

(e) On note $F = \operatorname{Ker}(d)$ et $G = \operatorname{Vect}(J)$: montrer que $E = F \oplus G$.

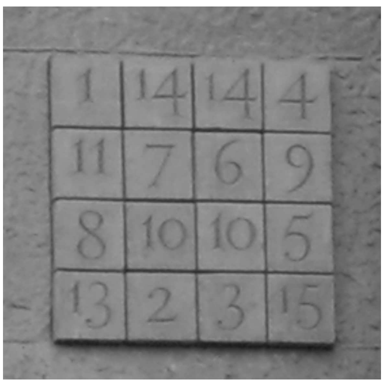
(f) On note
$$A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_{32} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Montrer que ces quatres matrices forment une base de F.

Quelle est la dimension de E ?

2. On considère le sous espace vectoriel H de E formé des matrices $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq 3,\ 1 \leq j \leq 3}$ telles que les huit réels
$$\sum_{j=1}^{3} a_{i,j} \text{ pour } 1 \leq i \leq 3, \quad \sum_{i=1}^{3} a_{i,j} \text{ pour } 1 \leq j \leq 3, \quad \operatorname{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{i,i} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{3} a_{i,4-i}$$
soient égaux (i.e) la somme des coefficients sur les lignes, les colonnes et les deux diagonales est la même.

Une telle matrice est dite **magique**. Par exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Pour le plaisir voici un carré magique d'ordre 6 faisant intervenir les 36 premiers entiers :
$$\begin{pmatrix} 27 & 29 & 2 & 4 & 13 & 36 \\ 9 & 11 & 20 & 22 & 31 & 18 \\ 32 & 25 & 7 & 3 & 21 & 23 \\ 14 & 16 & 34 & 30 & 12 & 5 \\ 28 & 6 & 15 & 17 & 26 & 19 \\ 1 & 24 & 33 & 35 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

Un autre exemple d'ordre 4 : 

, visible sur un des murs de la *Sagrada*

Familia (Barcelone).

(a) Soit $\mathcal{A}$ le sous espace vectoriel de H constitué par les matrices magiques antisymétriques. Quelle est la valeur commune des huits sommes pour un élément de $\mathcal{A}$? Déterminer une base de $\mathcal{A}$.

(b) Soit $\mathcal{S}$ le sous espace vectoriel de H constitué des matrices magiques symétriques : en déterminer une base.

(c) Déterminer une base et la dimension de H.

3. Dans cette question, on va exhiber une autre base de H, et l'utiliser pour construire en cascade des matrices magiques.

(a) Soit $D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$: montrer que $(J, D, {}^tD)$ est une base de H

Calculer $D^2,\ ({}^tD)^2,\ DJ,\ JD,\ {}^tDJ,\ J\,{}^tD$

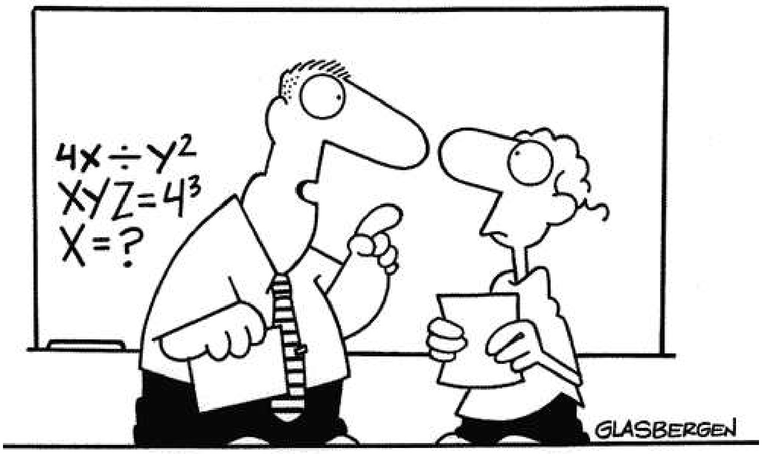
Montrer que ${}^tDD + D\,{}^tD$ est une combinaison linéaire de I_3 et de J.

(b) Soit $A \in H$ de coordonnées (a, b, c) dans la base $(J, D, {}^t D)$ et $A' \in H$ de coordonnées (a', b', c') dans la base $(J, D, {}^t D)$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur les coordonnées pour que $AA' \in H$.

(c) Montrer que le produit d'une matrice magique et d'une combinaison linéaire de I_3 et de J est magique.

(d) Montrer que les puissances paires d'une matrice magique ne sont magiques que dans un cas à préciser, et que les puissances impaires d'une matrice magique sont toutes magiques.



"Algebra class will be important to you later in life because there's going to be a test six weeks from now."