

Exercice 1 A rendre le vendredi 15 mai 2009

Soit f , l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par :

$$f(x, y, z) = (5x + y - z, 6y, -x - y + 5z).$$

On note $\mathcal{C} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 , et id l'application identité de \mathbb{R}^3 .

1. Préciser M , la matrice canoniquement associée à f .

Pour le plaisir : calculer le rang de M , en déduire qu'elle est inversible, et calculer, en indiquant la méthode utilisée, l'inverse de M .

2. On pose, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $P(\lambda) = \det(M - \lambda.I)$, où I désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Vérifier que P est un polynôme de degré trois : en déterminer les racines sachant qu'il admet une racine multiple λ_2 .

3. On appelle spectre de f l'ensemble $\text{Sp}(f)$ des réels λ pour lesquels le noyau $\text{Ker}(f - \lambda \text{id})$ n'est pas réduit au vecteur nul $\vec{0}$ de \mathbb{R}^3 . Justifier soigneusement l'équivalence suivante :

$$(\lambda \in \text{Sp}(f)) \Leftrightarrow (P(\lambda) = 0).$$

4. Ainsi, $\text{Sp}(f) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ avec $\lambda_1 < \lambda_2$.

(a) Soit $M_1 = M - \lambda_1 I$: calculer le rang de M_1 . En déduire la dimension et une base de $E_1 = \text{Ker}(f - \lambda_1 \text{id})$.

(b) Soit $M_2 = M - \lambda_2 I$: calculer le rang de M_2 . En déduire la dimension et une base de $E_2 = \text{Ker}(f - \lambda_2 \text{id})$.

(c) Vérifier, sans trop de calculs, que E_1 et E_2 sont en somme directe, mais pas supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .

5. Justifier qu'il n'est pas possible de trouver une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de f est diagonale.

6. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ de \mathbb{R}^3 , de la forme

$$\vec{a} = (1, *, *), \quad \vec{b} = (1, *, *), \quad \vec{c} = (1, *, *)$$

dans laquelle la matrice de f est de la forme $T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

7. Ecrire une formule reliant M et T , en détaillant complètement toutes les matrices y intervenant.

8. On pose $T = D + N$, où $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Vérifier que N est nilpotente (on rappelle que cela signifie qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $N^k = 0$).

(b) Montrer qu'il est alors possible d'obtenir très facilement une expression de T^n pour tout entier $n \geq 0$.

(c) Question facultative : cette formule est-elle encore valable pour $n = -1$?

9. Déduire, de ce qui précède, une expression détaillée de M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Question facultative : évaluer cette formule pour $n = -1$ et comparer au résultat obtenu à la question 1.

10. Question facultative : donner une expression, en fonction de n des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $u_0 = w_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$: $u_{n+1} = 5u_n - w_n + 6^n$ et $w_{n+1} = -u_n + 5w_n - 6^n$.

Exercice 2 A rendre le vendredi 22 mai 2009**Préliminaires**

On rappelle ici la définition d'une intégrale d'une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} et à valeurs complexes : si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, avec $f(t) = x(t) + iy(t)$, où x et y sont des fonctions continues à valeurs réelles, alors $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b x(t)dt + i \int_a^b y(t)dt$. Les formules d'intégration par parties sont encore valables, et on rappelle que, si α est une constante **complexe** : $\frac{d(e^{\alpha t})}{dt} = \alpha e^{\alpha t}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit l'intégrale (complexe)

$$J_n = \int_0^\pi t^n e^{it} dt.$$

1. Montrer qu'il existe une relation de récurrence simple entre J_{n+1} et J_n .
2. Donner alors les valeurs de J_0, J_1, J_2 .
3. En déduire les valeurs des intégrales $K_0 = \int_0^\pi \cos(t)dt$, $K_1 = \int_0^\pi t \cos(t)dt$ et $K_2 = \int_0^\pi t^2 \cos(t)dt$.

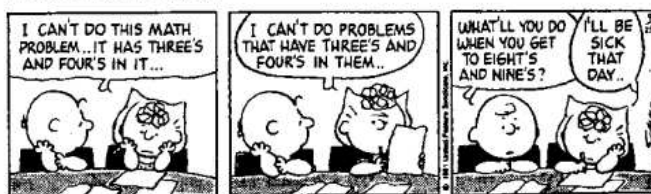
Etude d'un produit scalaire sur un espace vectoriel de fonctions

On considère ici l'espace E des fonctions f qui peuvent s'écrire sous la forme

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + e \cos(x) \quad \text{où } a, b, c, d, e \in \mathbb{R}.$$

1. Justifier que E est un espace vectoriel sur le corps \mathbb{R} , de dimension finie.
En donner une base \mathcal{C} .
2. Pour f et g dans E , on définit la quantité $(f|g) := \int_0^\pi f(t)g(t)dt$.
Montrer¹ que cela définit un produit scalaire sur E .
3. $F = \mathbb{R}_2[X]$ est clairement un sous-espace vectoriel de E : donner, à l'aide du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, une base orthonormale \mathcal{B} de F .
4. La fonction \cos n'appartient pas à F : pourquoi ?
Déterminer le projeté orthogonal f de \cos sur le sous-espace F .
5. (a) Quelle est la valeur de $d_1 = d(\cos, F)$, distance de \cos à F ?
(b) Peut-on «minimaliser» la quantité $I(a, b, c) = \int_0^\pi (ax^2 + bx + c - \cos x)^2 dx$, a, b et c étant des réels ? Si oui, quelle est la valeur de ce minimum ?
6. Le polynôme X^3 n'appartient pas à F : pourquoi ?
Déterminer le projeté orthogonal g de X^3 sur le sous-espace F .
7. Dans E , qui est le plus «proche» du sous-espace F : \cos ou X^3 ?

PEANUTS By Charles M. Schulz



¹On signera la preuve de la définie-positivité.