

**Exercice 1** Le but de cet exercice est de déterminer les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  solutions de l'équation :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \quad (\star).$$

- Déterminer les solutions constantes de  $(\star)$ .
- L'ensemble des fonctions solutions de  $(\star)$  est-il un espace vectoriel?
- Soit  $f$ , une solution non constante de  $(\star)$ .
  - Montrer que  $f(0) = 1$  et  $f'(0) = 0$ .
  - Montrer que  $f$  est une fonction paire.
- Soit  $f$ , une solution non constante de  $(\star)$ .  
On définit  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  par :  $F(x, y) = f(x+y) + f(x-y)$ .
  - Justifier que  $F$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  et calculer les dérivées partielles secondes de  $F$ .
  - En déduire que  $f$  vérifie une équation différentielle de la forme  $f'' + \alpha f = 0$ .  
Donner les solutions de cette équation selon les valeurs de  $\alpha$ .
- Déterminer enfin toutes les solutions de l'équation  $(\star)$ .

**Exercice 2** On définit la fonction  $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto f(x, y) = \sin(x) + \sin(y) - \sin(x+y) \end{cases}$ .

- Montrer que la fonction  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
- Prouver que l'ensemble  $\Omega = ]-\pi, +\pi[ \times ]-\pi, +\pi[$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .
  - Déterminer les points  $M = (x, y)$  de  $\Omega$  vérifiant  $\overrightarrow{\text{grad}}f(M) = \vec{0}$ .
  - On définit le carré  $\Delta = [-\pi, +\pi] \times [-\pi, +\pi]$  : prouver que  $\Delta$  est un fermé<sup>1</sup> de  $\mathbb{R}^2$ .
- Vérifier que, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :  $f(x, y) = 4 \sin(\frac{x}{2}) \sin(\frac{y}{2}) \sin(\frac{x+y}{2})$ .
- Représenter graphiquement les ensembles suivants :
  - $S_0 = \{M = (x, y) \in \Delta \mid f(M) = 0\}$
  - $S_+ = \{M = (x, y) \in \Delta \mid f(M) > 0\}$
  - $S_- = \{M = (x, y) \in \Delta \mid f(M) < 0\}$
- $\Delta$  est une partie **bornée et fermée** de  $\mathbb{R}^2$  : on dit que  $\Delta$  est une **partie compacte** de  $\mathbb{R}^2$  (ou, tout simplement, est un compact de  $\mathbb{R}^2$ ). Un théorème, que vous verrez en seconde année, affirme que toute fonction continue sur un compact y est bornée et atteint ses bornes (faire l'analogie avec le résultat, vu cette année, pour les fonctions numériques d'une variable réelle!). On admet donc que la restriction de  $f$  à  $\Delta$  y admet un maximum et un minimum : justifier que ceux-ci sont atteints en des points situés à l'intérieur de  $\Delta$ , (i.e) sur l'ensemble  $\Omega = ]-\pi, +\pi[ \times ]-\pi, +\pi[$ . Préciser ces points et leur nature.
- La fonction  $f$  admet-elle un maximum sur  $\mathbb{R}^2$ ? Un minimum sur  $\mathbb{R}^2$ . Si oui, en quel(s) point(s) sont-ils atteints?



<sup>1</sup>On rappelle que cela signifie que son complémentaire  $C$  dans  $\mathbb{R}^2$  est un ouvert.