**Exercice** Calculer les développements limités suivants, à l'ordre et au voisinage du point demandé.

While (résultat obtenu)$\neq$ (celui de Maple) then do (je recommence) od.

1. Développement limité au voisinage de 0, à l'ordre 2 de
$$f(x) = \exp(x + \sqrt{1+x})$$
```
> taylor(exp(x+sqrt(1+x)),x=0,3);
```
$$e + \frac{3}{2}\, e\, x + e\, x^2 + \mathrm{O}(x^3)$$

2. Développement limité au voisinage de 0, à l'ordre 2 de
$$f(x) = \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)}$$
```
> taylor((exp(x)-1)/ln(1+x),x=0,4);
```
$$1 + x + \frac{1}{3}\, x^2 + \mathrm{O}(x^3)$$

3. Développement limité au voisinage de 0, à l'ordre 2 de
$$f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1+x}}$$
```
> taylor(sqrt(1+sqrt(1+x)),x=0,3);
```
$$\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{8}\, x - \frac{5\,\sqrt{2}}{128}\, x^2 + \mathrm{O}(x^3)$$

4. Développement limité au voisinage de 0, à l'ordre 4 de
$$f(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\sin(x)}$$
```
> taylor(sinh(x)/sin(x),x=0,7);
```
$$1 + \frac{1}{3}\, x^2 + \frac{1}{18}\, x^4 + \mathrm{O}(x^6)$$

5. Développement limité au voisinage de 0, à l'ordre 5 de
$$f(x) = (1 + \sin(x))^{\cos(2x)-1}$$
```
> taylor((1+sin(x))^(cos(2*x)-1),x=0,6);
```
$$1 - 2\, x^3 + x^4 + \frac{1}{3}\, x^5 + \mathrm{O}(x^6)$$

6. Soit $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1} \exp\left(\dfrac{1-x}{1+x^2}\right)$.
Montrer qu'il existe trois réels $a$, $b$ et $c$ tels que, au voisinage de $+\infty$, on ait
$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0.$$
```
> series((x^2-1)/(x+1)*exp((1-x)/(1+x^2)),x=+infinity,3);
```
$$x - 2 + \frac{5}{2\,x} + \mathrm{O}(\frac{1}{x^2})$$