

PROBLEME LES MOYENNES ARITHMÉTIQUE, GÉOMÉTRIQUE ET HARMONIQUE**Des inégalités célèbres**

1. (a) Montrer que : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.

(b) En déduire ¹ que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x_1, x_2, \dots, x_{2^n}) \in (\mathbb{R}^+)^{2^n}, \left(\prod_{i=1}^{2^n} x_i \right)^{\frac{1}{2^n}} \leq \frac{\sum_{i=1}^{2^n} x_i}{2^n} \quad (*).$$

2. Soit k un entier naturel non nul et (x_1, x_2, \dots, x_k) un élément de $(\mathbb{R}^+)^k$.

$$\sum_{i=1}^k x_i$$

On pose $m = \frac{\sum_{i=1}^k x_i}{k}$: m est donc la **moyenne arithmétique** des nombres x_1, x_2, \dots, x_k .

(a) Justifier qu'il existe un, et un seul, entier n tel que : $2^n \leq k < 2^{n+1}$.

(b) Pour cet entier n précédemment trouvé, on pose : $x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_{2^{n+1}} = m$.
En appliquant l'inégalité (*) aux nombres $x_1, \dots, x_k, \dots, x_{2^{n+1}}$, montrer ² que :

$$\left(\prod_{i=1}^k x_i \right)^{\frac{1}{k}} \leq \frac{\sum_{i=1}^k x_i}{k} \quad (**).$$

Le nombre $\left(\prod_{i=1}^k x_i \right)^{\frac{1}{k}}$ est la **moyenne géométrique** des nombres x_1, x_2, \dots, x_k .

3. Soit k un entier naturel non nul et (x_1, x_2, \dots, x_k) un élément de $(\mathbb{R}^{+*})^k$.
En appliquant l'inégalité (**) aux nombres $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_k}$, montrer que :

$$\frac{k}{\sum_{i=1}^k \frac{1}{x_i}} \leq \left(\prod_{i=1}^k x_i \right)^{\frac{1}{k}} \leq \frac{\sum_{i=1}^k x_i}{k} \quad \text{i.e.} \quad \frac{k}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_k}} \leq \sqrt[k]{x_1 \dots x_k} \leq \frac{x_1 + \dots + x_k}{k}.$$

Le nombre $\frac{k}{\sum_{i=1}^k \frac{1}{x_i}}$ est appelé **moyenne harmonique** des nombres x_1, x_2, \dots, x_k .

4. Conclusion : quel résultat peut-on énoncer ?

Quelques applications

1. Une voiture A roule à x km.h⁻¹ puis à y km.h⁻¹ pendant le même temps.

Une voiture B roule à x km.h⁻¹ puis à y km.h⁻¹ sur la même distance.

Calculer les vitesses moyennes respectives v_A et v_B des voitures A et B , et les comparer.

¹Une récurrence faible sur n s'impose. On pourra commencer par justifier $\prod_{i=1}^{2^{n+1}} x_i = \prod_{i=1}^{2^n} x_i \times \prod_{j=1}^{2^n} x_{2^n+j}$

²On n'oubliera pas, dans le cours du calcul, que $\sum_{i=1}^k x_i = k \times m$.

2. Mon *****³ m'explique que l'an dernier, pour venir chez moi, à l'aller sa moyenne a été de 20 km/h, « beaucoup de (*bip*) sur la route, que de la ville » (*sic* !). En revanche, au retour « 100 de moyenne ! à 4 h du matin, tous couchés ! ». Il m'affirme alors fièrement que sur le trajet aller-retour, il peut prétendre à une moyenne de 60 km/h. Que pensez-vous de ce résultat ?
3. A périmètre donné, quand l'aire d'un champ rectangulaire est-elle maximum ?
4. Un politicien nous explique l'inflation :
 « cette année l'inflation est de 10%, les prix sont donc multipliés par 1,1. On parle de coefficient d'inflation de 1, 1. Les deux années précédentes l'inflation était de 1%. L'inflation moyenne m sur 3 ans, qui correspond à un coefficient par lequel sont multipliés les prix en trois ans d'inflation **constante** à m %, est telle que $1 + \frac{m}{100} = \frac{1,01 + 1,01 + 1,1}{3} = 1,04$. On a donc une inflation moyenne de 4% en trois ans. »
 Pensez-vous que ce calcul soit correct, sur-évalué, sous-évalué ?
5. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}} \leq (n!)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{n+1}{2}.$$

6. Si y_1, y_2, \dots, y_n sont des réels strictement positifs, montrer que :

$$\frac{y_1}{y_2} + \frac{y_2}{y_3} + \dots + \frac{y_{n-1}}{y_n} + \frac{y_n}{y_1} \geq n.$$

7. On suppose que x, y et z sont des réels positifs tels que $2009x + 2010y + 2011z = 6030$. Déterminer la valeur maximum de $x^{2009}y^{2010}z^{2011}$.
8. Soit $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + 1$ un polynôme à coefficients réels de degré 2 au moins. On suppose que P admet n racines réelles négatives que l'on note $-\alpha_1, \dots, -\alpha_n$ où pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}^+$.
 - (a) Donner la factorisation de $P(x)$.
 - (b) Exprimer $\prod_{k=1}^n \alpha_k$ en fonction d'une valeur prise par P et en déduire sa valeur.
 L'une des racines peut-elle être nulle ?
 - (c) A l'aide de l'inégalité arithmético-géométrique, montrer que si $q \in \mathbb{N}^*$ et $a \in]0, +\infty[$

$$\frac{(q+a)}{q+1} \geq {}^{q+1}\sqrt{a}$$

- (d) En déduire que pour tout entier $q \in \mathbb{N}$, on a

$$P(q) \geq (q+1)^n$$



³A compléter par : beauf, cousin, meilleur ami, ou toute personne invitée au bal des casse-pieds.