

Le premier problème est **OBLIGATOIRE**, le second facultatif.

PROBLEME 1

Première partie : étude d'exemples

On pose $E = \mathbb{R}^2$ et on définit les endomorphismes de E , f_0 et φ , par :

$$\varphi : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & \varphi(x, y) = (x + y, x + y) \end{cases} \quad \text{et} \quad f_0 : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & f_0(x, y) = (2x + y, x + 2y) \end{cases} .$$

1. Déterminer les noyau et image de φ : on donnera, si c'est possible une famille génératrice simple de chacun d'entre eux.
 φ est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$: $\varphi^k = \underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{k \text{ fois}} = 2^{k-1}\varphi$.
3. Vérifier que $f_0 = \varphi + I = \varphi + \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$. En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, une expression de $f_0^n = \underbrace{f_0 \circ \dots \circ f_0}_{n \text{ fois}}$ en fonction de φ et $I = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$.
4. Calculer $f_0^2 - 4f_0 = f_0 \circ f_0 - 4f_0$ (on trouve λI où λ est un réel que l'on déterminera).
5. f_0 est-elle une application injective ? surjective ?

Deuxième partie : étude du cas général

E désigne ici **un** \mathbb{R} -espace vectoriel non trivial, mais quelconque (pas forcément \mathbb{R}^2), et f **un** endomorphisme de E ($f \in \mathcal{L}(E)$) vérifiant l'égalité :

$$f^2 - 4f + 3I = 0.$$

où l'on a posé $I = \text{Id}_E$, application identité de E (rappel : ici, 0 représente $0_{\mathcal{L}(E)}$).

1. (a) Montrer que f est un automorphisme de E et exhiber f^{-1} .
(b) On note g et h les éléments de $\mathcal{L}(E)$ définie par $g = f - 3I$ et $h = f - I$.
Déterminer $g \circ h$ et $h \circ g$.
(c) En déduire ¹ deux inclusions, que l'on prouvera, liant chacune deux ensembles parmi les quatre suivants : $\text{Im}(g)$, $\text{Im}(h)$, $\text{Ker}(g)$ et $\text{Ker}(h)$.

¹On demande ici d'écrire ces deux inclusions et d'en démontrer une.

(d) Montrer que I peut s'écrire comme combinaison linéaire de g et h .

En déduire que $E = \text{Im}(g) + \text{Im}(h)$.

(e) On pose $G = \text{Ker}(g)$ et $H = \text{Ker}(h)$.

Prouver ² que G et H sont des sous-espaces supplémentaires de E .

2. On note p la projection vectorielle sur G parallèlement à H , et q la projection vectorielle sur H parallèlement à G . Faire un schéma illustrant cette situation et faisant apparaître les espaces G , H , un vecteur \vec{x} quelconque, $p(\vec{x})$ et $q(\vec{x})$.

(a) Montrer qu'on a $f = 3p + q$.

(b) Que valent $p \circ q$ et $q \circ p$? Démontrer rapidement ces résultats.

(c) Déduire des résultats précédents l'expression de f^n en fonction uniquement de p et q (et de $n \geq 1$).

(d) Vérifier que p et q sont des combinaisons linéaires de f et de $I = \text{Id}_E$.

Troisième partie : retour au cas particulier

On reprend l'application f_0 donnée dans la première partie :

$$f_0 : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & f_0(x, y) = (2x + y, x + 2y) \end{cases}$$

1. Peut-on appliquer les résultats de la deuxième partie à f_0 (on attend une justification) ?

2. Montrer qu'il existe deux projecteurs p et q de $E = \mathbb{R}^2$, que l'on explicitera, et des constantes réelles a et b vérifiant : $\forall n \geq 1, f_0^n = a^n p + b^n q$.

3. Trouver, à l'aide de la deuxième partie, l'expression analytique de f_0^n . Ce résultat est-il cohérent avec le résultat trouvé dans la première partie ?

4. On définit deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$\begin{cases} u_{n+1} & = & 2u_n + v_n \\ v_{n+1} & = & u_n + 2v_n \end{cases}.$$

Montrer l'équivalence :

$$(u \text{ et } v \text{ convergent}) \Leftrightarrow (u \text{ et } v \text{ sont constantes}).$$

²On n'oubliera pas que $G = \text{Ker}(f - 3I)$ et $H = \text{Ker}(f - I)$, donc $\vec{x} \in G$ équivaut à $f(\vec{x}) = \dots$, et $\vec{x} \in H$ à $f(\vec{x}) = \dots$

PROBLEME 2 Trois moutons sont dans un pré, qui jouent à saute-moutons, comme il se doit. Le premier mouton saute par dessus le deuxième, et se retrouve donc dans la position symétrique de la position qu'il occupait par rapport au deuxième mouton. Puis, le deuxième mouton saute par dessus le troisième. Enfin, le troisième saute par au-dessus du premier, qui, rappelons-le, a déjà bougé. Et le jeu recommence indéfiniment. Le but de ce problème est de connaître les positions initiales de ces trois moutons qui permettent de les laisser jouer dans un pré sans crainte qu'un d'entre eux ne sorte du pâturage en sautant par dessus un de ses congénères.

On appelle a_n, b_n et c_n les trois complexes qui vont représenter, dans le plan, la position respective de chacun de ces trois moutons à l'étape n (i.e après n sauts). Ainsi, a_0, b_0 et c_0 sont les positions initiales.

1. Montrer que les suites vérifient la relation, pour tout entier n :
- $$\begin{cases} a_{n+1} = -a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = - b_n + 2c_n \\ c_{n+1} = -2a_n + 4b_n - c_n \end{cases} .$$

C'est donc naturellement que l'on définit f , endomorphisme du \mathbb{C} -espace vectoriel \mathbb{C}^3 , par

$$f(x, y, z) = (-x + 2y, -y + 2z, -2x + 4y - z).$$

2. Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$,

$$(a_n, b_n, c_n) = f^n(a_0, b_0, c_0)$$

où l'on rappelle $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ (n compositions).

3. φ désigne l'unique racine positive de l'équation $x^2 = x + 1$ (le *nombre d'or*) : que vaut φ ?

Dans la suite du problème, on n'oubliera pas que φ vérifie les relations $\varphi^2 = \varphi + 1$, $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} \dots$

4. Montrer³ que, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$, il existe un, et un seul $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que :

$$(x, y, z) = \alpha \cdot (1, 1, 1) + \beta \cdot (1, \frac{1}{\varphi}, 1 - \frac{1}{\varphi}) + \gamma \cdot (1, -\varphi, \varphi + 1).$$

Déterminer⁴ les valeurs de α, β et γ en fonction de x, y et z .

5. On définit les trois endomorphismes de \mathbb{C}^3 à l'aide des quantités α, β et γ trouvées à la question précédente :

$$p : (x, y, z) \mapsto p(x, y, z) = \alpha \cdot (1, 1, 1) = (\alpha, \alpha, \alpha) = (\alpha(x, y, z), \alpha(x, y, z), \alpha(x, y, z)),$$

$$q : (x, y, z) \mapsto q(x, y, z) = \beta \cdot (1, \frac{1}{\varphi}, 1 - \frac{1}{\varphi}) = (\beta(x, y, z), \frac{1}{\varphi} \cdot \beta(x, y, z), (1 - \frac{1}{\varphi}) \cdot \beta(x, y, z)),$$

$$r : (x, y, z) \mapsto r(x, y, z) = \gamma \cdot (1, -\varphi, \varphi + 1) = (\gamma(x, y, z), -\varphi \cdot \gamma(x, y, z), (\varphi + 1) \cdot \gamma(x, y, z)).$$

Vérifier que p est un projecteur de \mathbb{C}^3 .

De même, on pourrait le vérifier pour q et r (inutile de le faire).

³Pour cette question, on admettra que la théorie des déterminants et des systèmes de Cramer est encore valable avec des valeurs complexes.

⁴Pour vérification : on trouve $\gamma = \frac{(2 - \varphi)x - y + (\varphi - 1)z}{1 + \varphi^2}$

6. Vérifier que $p \circ q = 0 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^3)}$.

De même, on pourrait vérifier $q \circ p = p \circ r = r \circ p = q \circ r = r \circ q = 0$ (inutile de le faire).

7. Vérifier que

$$f = p + \lambda_1 q + \lambda_2 r,$$

où $\lambda_1 = -2 + \sqrt{5}$ et $\lambda_2 = -2 - \sqrt{5}$.

8. Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$,

$$f^n = p + \lambda_1^n q + \lambda_2^n r.$$

9. A quelle condition portant sur (a_0, b_0, c_0) est-on assuré que les trois suites $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ et $(c_n)_{n \geq 0}$ soient bornées ?

Bien entendu, on suppose $a_0 \neq b_0$, $b_0 \neq c_0$ et $a_0 \neq c_0$ (...): vérifier que la condition précédente se traduit alors par une position initiale des trois moutons alignés.

Quel est le rapport ⁵ entre les distances les séparant dans cette position à l'origine ? Étonnant, non ?

⁵Calculer le rapport de longueurs $\frac{M_1 M_3}{M_1 M_2}$ où M_i désigne le mouton numéro i dans sa position initiale.