Exercice 1 Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_1 = \frac{3}{2} \quad \text{et, pour tout } n \geqslant 0, \quad u_{n+2} = \frac{5}{2}u_{n+1} - u_n.$$

On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = 2^n u_{n+1} - 2^{n+1}u_n \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{u_{k+1}}{2^{k+1}} - \frac{u_k}{2^k}\right).$$

1. Une question de cours : si q est une constante réelle (et $n \in \mathbb{N}$), rappeler, sans démonstration, la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$.

   En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=i}^{n} q^k$ lorsque $0 \leqslant i \leqslant n$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, simplifier S_n.
   En déduire, lorsque cela est possible, une expression de u_n utilisant un terme de la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$.
3. Calculer les valeurs de v_n pour $n \in [\![0 ; 10]\!]$. `Python` peut être votre ami.
4. Déterminer la valeur de v_n pour n quelconque dans $\mathbb{N}$ (une preuve est attendue...).
5. En déduire[1] la valeur de S_n en fonction de n, puis celle de u_n.
6. Montrer le résultat suivant

   $$\text{« pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n}(k+1)u_k = n2^{n+1} + \frac{n+3}{2^n} - 3\text{»}$$

   – à l'aide d'une preuve par récurrence.

   – puis par une preuve directe en utilisant astucieusement $k+1 = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} 1$.
7. Et une dernière somme pour terminer.
   (a) Simplifier la quantité (il s'agit bien de «2 puissance 2^n»...) :

   $$\frac{1}{2^{2^n} - 1} - \frac{1}{2^{2^{n+1}} - 1}.$$

   (b) En déduire la valeur de la somme

   $$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_{2^k}}$$

   et sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 Pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, on note

$$S_p(n) = \sum_{k=0}^{n} k^p = 0^p + 1^p + 2^p + \cdots + n^p.$$

On prend la convention $0^0 = 1$.

1. Rappeler la formule du binôme.
2. En voyant la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} S_k(n)$ comme une somme double, prouver directement l'égalité, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$,

   $$\sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} S_k(n) = S_{p+1}(n+1).$$

1. On pourra commencer par chercher un lien entre v_k et le terme général de la somme S_n.

3. En déduire :

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} S_k(n) = (n+1)^{p+1}.$$

4. Montrer que cette formule permet de retrouver <u>directement</u> les valeurs des sommes :

$$\sum_{k=0}^{n} k \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} k^3.$$

Exercice 3 Soit m un paramètre réel et f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ par

$$f_m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+mz \\ x-y-mz \\ 2x+my+mz \end{pmatrix}$$

On s'intéresse à l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité et à l'espace image de f_m. Ainsi si l'on demande ce que l'on peut déduire d'un résultat et/ou calcul pour f_m, on attend une réponse relative à ces questions.

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $m = 1$.
   (a) Calculer $f_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $f_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, que peut-on en déduire pour f_1 ?
   (b) Résoudre le système $f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, que peut-on en déduire pour f_1 ?
   (c) A quelle condition sur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, le système $f_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet-il au moins une solution ? Que peut-on en déduire pour f_1 ?
2. On se place dans le cas général où $m \in \mathbb{R}$ est quelconque.
   (a) Pour $m \notin \{0, 1\}$, montrer que pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ l'équation $f_m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet toujours une unique solution. Que peut-on en déduire pour f_m ?
   (b) Pour $m = 2$ déterminer $f_2^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ en fonction de $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
   (c) Que dire de f_0 ?