Exercice 1

Soit f la fonction qui à un complexe z associe, lorsque c'est possible, $f(z) = \dfrac{z^2}{z-2i}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f. Ainsi, $f : \left| \begin{array}{lll} D & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & f(z) = \dfrac{z^2}{z-2i} \end{array} \right.$.
2. (a) Déterminer les racines carrées complexes de $8-6i$.
   (b) En déduire tous les antécédents de $1+i$ par f.
3. Soit $h \in \mathbb{C}$, un complexe. Discuter suivant les valeurs de h le nombre d'antécédents de h par f.
4. Déterminer l'ensemble image $f(D)$ de D par f i.e «Im(f), l'image de l'application f».
   La fonction $f : D \to \mathbb{C}$ est-elle une application surjective ?
5. La fonction $f : D \to \mathbb{C}$ est-elle une application injective ?

Exercice 2

Soit f définie sur $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \setminus \{1\}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, par $f(z) = \dfrac{z-1}{1-\overline{z}}$ i.e $f : \left| \begin{array}{lll} \widehat{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & f(z) = \dfrac{z-1}{1-\overline{z}} \end{array} \right.$.

1. Montrer que $|f(z)| = 1$ pour tout $z \in \widehat{\mathbb{C}}$.
   Que peut-on en conclure, pour l'instant, sur $f(D) = \mathrm{Im}(f)$ («image de l'application f») et $\mathbb{U}$?
   L'application $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ est-elle surjective ? Justifier.
2. Résoudre l'équation $f(z) = 1$. L'application $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ est-elle injective ? Justifier.
3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des complexes $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ tels que $f(z) \in \mathbb{R}$.
   Que représente cet ensemble $\mathcal{E}$ par rapport à f ?
4. Résoudre l'équation $f(z) = e^{i\theta}$, d'inconnue $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ et de paramètre $\theta \in \mathbb{R}$.
   Préciser alors l'ensemble $f\left(\widehat{\mathbb{C}}\right)$ i.e «Im(f), l'image de l'application f».

Exercice 3

On définit $u = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{7}\right) = e^{\frac{2i\pi}{7}}$, et on pose

$$S = u + u^2 + u^4 \quad \text{et} \quad T = u^3 + u^5 + u^6.$$

1. (a) Que vaut u^7 ? Comparer $\overline{u}$ et $\frac{1}{u}$.
   (b) En déduire que les complexes S et T sont conjugués.
   (c) Justifier correctement, sans évaluation numérique, que la partie imaginaire de S est positive.
2. (a) Simplifier la somme $S+T$.
   (b) Développer et simplifier au maximum le produit $S \times T$.
   (c) En déduire la valeur de S et celle de T.
3. <u>Une première application</u>
   Montrer :
   $$\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right) = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$
4. <u>Une deuxième application</u>

(a) Montrer :

$$\sum_{k=1}^{6}(-u^2)^k = -i\tan\left(\frac{2\pi}{7}\right).$$

(b) Justifier :

$$2(u^2 - u^5) = 4i\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right).$$

(c) En déduire :

$$4\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) - \tan\left(\frac{2\pi}{7}\right) = \sqrt{7}.$$

5. Une troisième application

On pose :

$$P_1 = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) \quad \text{et} \quad P_2 = \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right).$$

(a) Montrer que $8 \times P_1 \times P_2 = P_2$ et en déduire la valeur de P_1.

(b) En linéarisant $2\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)$ puis $4\left(\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)\right) \times \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ montrer que

$$4P_2 = \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right).$$

et en déduire la valeur de P_2.

6. Et un défi olympique pour conclure

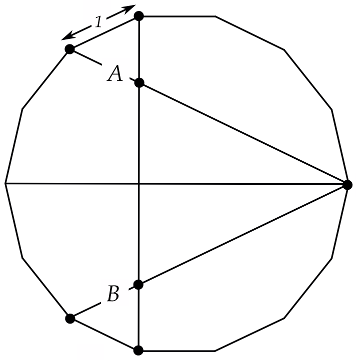

Schéma 1

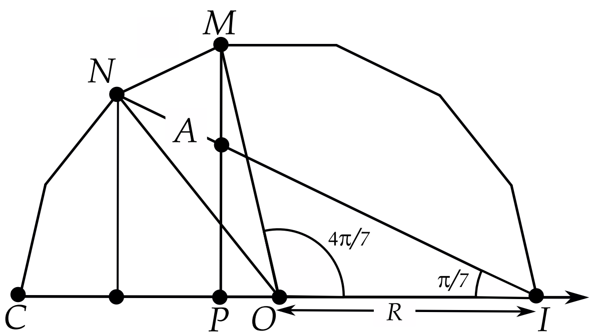

Schéma 2

Dans le tétradécagone régulier du schéma 1, la longueur d'un côté est égale à une unité de mesure. On se propose de déterminer la longueur de AB.

(a) Dans le schéma 2, justifier les deux angles marqués.

(b) Déterminer R en fonction de $\sin\left(\frac{\pi}{14}\right)$.

(c) Déterminer IP puis en déduire que

$$AP = \tan\left(\frac{\pi}{7}\right)\frac{1-\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{14}\right)}$$

puis que

$$AP = 4\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)$$

et enfin que

$$AP = 4\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{7}\right).$$

(d) Quelle est la valeur de AB ?

Exercice 4 Localisation des racines d'un polynôme

On considère le polynôme

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k,$$

où $n \geqslant 2$ et vérifiant les conditions :

- a_n et a_{n-1} sont des réels avec $a_n \geqslant 1$ et $a_{n-1} > 0$
- $\forall k \in [\![0\,;\, n-2]\!] = \{0, 1, \ldots, n-2\}$, $a_k \in \mathbb{C}$.

On note $M = \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n-2}|\} = \max\{|a_k| \mid k \in [\![0\,;\, n-2]\!]\}$: M est donc la plus grande des valeurs $|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n-2}|$.

1. Soit z, une racine complexe du polynôme P de partie réelle strictement positive.
   (a) Montrer que $\dfrac{1}{z}$ a également une partie réelle strictement positive.
   (b) On suppose, de plus, $|z| > 1$. Justifier toutes les inégalités suivantes :
   $$1 \leqslant \operatorname{Re}\left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{z}\right) \leqslant M \sum_{k=0}^{n-2} |z|^{k-n} \leqslant \frac{M}{|z|^2 - |z|}.$$
   En déduire : $\left| |z| - \dfrac{1}{2} \right| \leqslant \dfrac{\sqrt{1+4M}}{2}$ puis $|z| \leqslant \dfrac{1+\sqrt{1+4M}}{2}$.
   (c) Que peut-on déjà affirmer avec ces résultats ? Illustrer par un schéma.
2. Soit z une racine du polynôme P.
   Montrer que $\operatorname{Re}(z) \leqslant 0$ ou $|z| \leqslant \dfrac{1+\sqrt{1+4M}}{2}$.
3. Une application
   On considère le polynôme $Q(X) = X^3 + \frac{1}{2}X^2 - (7+4i)X - 5 - 10i$.
   (a) Sans les calculer, hachurer la partie du plan complexe dans laquelle on est certain de trouver toutes les racines (réelles ou complexes) du polynôme Q.
   (b) Le polynôme Q possède une racine réelle r : chercher sa valeur.
   (c) En déduire toutes les racines du polynôme Q. Les placer sur le schéma de la question **3a**.