Exercice 1 On pose $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 3}$.

1. Déterminer D, l'ensemble de définition de f. Justifier que f est dérivable deux fois sur D et calculer $f'(x)$, $f''(x)$ pour tout $x \in D$.
2. Montrer que l'intervalle $[0, 2]$ est stable par f et trouver la plus petite constante C vérifiant $|f'(x)| \leqslant C$ pour tout $x \in [0, 2]$.
3. Déterminer toutes les solutions de l'équation «$f(x) = x$» (i.e les **points fixes** de f).
4. (a) Montrer que la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x)$ est finie.
   En déduire l'existence d'une droite asymptote pour f au voisinage de $+\infty$.
   (b) De même, justifier l'existence d'une droite asymptote pour f au voisinage de $-\infty$.
   (c) Tracer le graphe de f en faisant apparaître toutes les informations obtenues sur f.
5. On définit la suite $u = (u_n)_{n \geqslant 0}$ par :
$$u_0 = 0 \text{ et, pour tout entier } n \geqslant 0,\ u_{n+1} = f(u_n) = \sqrt{u_n^2 - 3u_n + 3}.$$
   Justifier que cette suite converge vers une valeur ℓ (à préciser) et indiquer une valeur de n pour laquelle $|u_n - \ell| \leqslant 10^{-3}$.

Exercice 2

On pose $f(x) = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) + 2\operatorname{Arctan}(x)$.

1. Déterminer l'ensemble D_f de définition de la fonction f.
2. Préciser les valeurs de $f(0)$, $f(1)$, $f(\sqrt{3})$, $f(-1)$, $f(-\sqrt{3})$.
3. Pour quelles valeurs de x peut-on calculer $f'(x)$ (**justifier**) ? Faire ce calcul dans ce cas.
4. Justifier que f est constante sur l'intervalle $[-1, +1]$.
5. Démontrer que, pour $x \in [+1, +\infty[$, $f(x) = -\frac{\pi}{2} + 4\operatorname{Arctan}(x)$.
6. Pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer $f(-x)$ à l'aide de $f(x)$.
   En déduire directement, mais en détaillant le raisonnement, une expression de $f(x)$ lorsque $x \in]-\infty, -1]$.
7. Tracer l'allure de la courbe représentative de f (sur D_f).