Exercice 1 Soit f définie par $f(x) = \dfrac{2}{4^x + 2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Calculer $f(x) + f(1-x)$. Que peut-on en déduire pour le graphe de f ?
3. Calculer alors la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} f\left(\frac{k}{11}\right)$.

Exercice 2 Résoudre l'équation, d'inconnue réelle x : $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(2x) = \dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 3 Résoudre l'équation : $7\operatorname{ch} x + 2\operatorname{sh} x = 9$.

Exercice 4 Déterminer les $x \in [-2\pi, 2\pi]$ tels que $\sin^2(x) \geqslant \dfrac{1}{4}$.

Exercice 5 On définit la fonction f par $f(x) = \operatorname{ch}(\ln x) + \operatorname{sh}(2\ln x)$.

1. Factoriser $(x^4 - 1)$ et $(x^3 + x)$.
2. Simplifier $f(x)$. En déduire le signe de $f(x)$.

Exercice 6 Soit $f(x) = \text{Arccos}\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$.

1. Domaine de définition et de dérivablilité de la fonction f ?
2. Calculer f', la dérivée de f. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{\ln(2+\sqrt{3})}^{\ln(1+\sqrt{2})} \frac{1}{\operatorname{ch} x}\mathrm{d}x$

Exercice 7 Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \displaystyle\int_1^e x^2 \ln^n(x)\mathrm{d}x$.

1. Etablir une relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n.
2. En exprimant u_n en fonction de u_{n+1}, montrer : $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{e^3}{n}$.
   Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 8 Soit un entier $n \geqslant 1$. Montrer que, pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$, on a l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(z + e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n = n(z^n + 1)\ .$$

En déduire la formule :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) = 0\ .$$

Exercice 9 On considère l'équation

$$(E) \qquad z^4 + (-3+4i)z^3 - (6+12i)z^2 + (18-4i)z + 12i = 0.$$

1. Montrer que (E) admet une racine réelle que l'on notera α.
2. Développer $(1+\beta)^4$ avec la formule du binôme.
3. Montrer que (E) admet une racine imaginaire pure de la forme $i\beta$ (où $\beta \in \mathbb{R}$).
4. Déterminer toutes les racines de (E).

Exercice 10 Soit f_n, fonction définie par définie par $f_n(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) + n\dfrac{x}{x+1}$, où $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que les tangentes au point d'abscisse $x = 1$ des graphes des fonctions f_n, pour $n \in \mathbb{N}$, sont concourantes.

Exercice 11 Soit f définie par $f(x) = \sqrt{\ln\left(\dfrac{e^{2x}+3}{e^{2x}+1}\right)}$.

1. Montrer que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer la dérivée f' et en déduire que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser. Déterminer l'expression de $f^{-1}(y)$.

Exercice 12 Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \arctan\sqrt{x}\mathrm{d}x$, en posant $x = t^2$.
2. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sh} x}{3+\operatorname{sh}^2 x}\mathrm{d}x$, en posant $u = \operatorname{ch} x$.
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$, avec une IPP.
4. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{\operatorname{ch} x}\mathrm{d}x$, en posant $u = e^x$.
5. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,\mathrm{d}x$, en posant $u = \frac{\pi}{4} - x$.
6. $\displaystyle I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$, en posant $x = \frac{1-y}{1+y}$.

Exercice 13 Soit $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$, la suite définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et, pour tout } n \geqslant 1, \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 4.$$

1. Montrer qu'il existe une constante c telle que la suite $v = (v_n)_{n\geqslant 0}$, définie par $v_n = u_n - c$, soit géométrique.
2. En déduire une expression de u_n en fonction de n, ainsi que la limite de cette suite u.
3. Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Donner une expression simplifiée de S_n, ainsi que sa limite lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 14 Soit g, définie par $g(t) = \dfrac{e^t}{\ln(|t|)}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de g ?
2. Soit $f(x) = \displaystyle\int_{2x}^{x^2} \frac{e^t}{\ln(|t|)}\mathrm{d}t$. Quel est l'ensemble de définition D_f de f ?
3. Justifier que f est dérivable sur D_f, et calculer $f'(x)$.

Exercice 15 Soit, pour $x \in [-1, +1]$, $f(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{Arccos}(x)$ et la suite u définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier $n \geqslant 0$: $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\pi}{4}$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ et qu'il existe un réel k tel que
$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right],\ |f'(x)| \leqslant k < 1.$$
3. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.
4. Prouver que la suite u converge vers α.
5. Pour quelle valeur de n peut-on affirmer que le terme u_n est une valeur approchée de α à 10^{-5} près ?