PROBLEME Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\mathrm{d}x$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\mathrm{d}x$: ces intégrales sont les *intégrales de Wallis.*

1. (a) Calculer I_0 et I_1.
   (b) Montrer, à l'aide d'un changement de variable affine : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = J_n$.
   <u>En déduire</u> les valeurs de I_2 et J_2.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et positive. Que peut-on en déduire ?
3. (a) Par une intégration par parties montrer :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = (n+1)\left(I_n - I_{n+2}\right)$$
   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(n+2)\, I_{n+2}I_{n+1} = (n+1)\, I_{n+1}I_n$.
   (c) Calculer la valeur de I_nI_{n+1} en fonction de n.
   (d) En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$.
4. (a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n \neq 0$.
   (b) Donner la valeur de $\dfrac{I_{n+2}}{I_n}$, puis en déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence :
   $$I_{2p} = \frac{\binom{2p}{p}}{2^{2p}}\frac{\pi}{2} \quad \text{pour tout entier } p \in \mathbb{N}.$$
   (c) En déduire une expression de I_{2p+1} pour tout entier $p \in \mathbb{N}$.
5. <u>Cette question est **facultative** (et n'est pas utile pour la suite du problème).</u>
   (a) Etablir l'inégalité suivante, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$.
   (b) En déduire [1] : $nI_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\pi}{2}$, puis donner un équivalent simple de I_n lorsque $n \to +\infty$.
   On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $G_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.
   On ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de G_n.
   (c) Soit $n > 0$. Montrer que, pour tout $u \geqslant -n$: $\left(1+\dfrac{u}{n}\right)^n \leqslant e^u$.
   En déduire : $\forall t \in [0, \sqrt{n}],\quad \left(1-\dfrac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2} \leqslant \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)^n}$.
   (d) Etablir [2] alors l'encadrement suivant : $\sqrt{n}\times I_{2n+1} \leqslant G_n \leqslant \sqrt{n}\times I_{2n-2}$.
   (e) Enfin, montrer que la suite $(G_n)_{n\geqslant 1}$ a une limite finie qu'on déterminera.
   Au final, qu'a t-on calculé ?
6. On définit $K_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^{2n}(x)\mathrm{d}x$ et $u_n = \dfrac{4^n\,(n!)^2}{(2n)!}K_n$ pour tout entier n .
   (a) A l'aide d'intégrations par parties successives dans J_{2n}, exprimer J_{2n} à l'aide de K_n et K_{n-1}.

1. Indication : on pourra observer que $nI_n^2 = nI_{n+1}I_n \times \dfrac{I_n}{I_{n+1}}$.

2. On pourra commencer par effectuer les changements de variables suivants : $t = \sqrt{n}\cos(x)$ dans l'intégrale $A_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n\mathrm{d}t$ et $t = \sqrt{n}\tan(x)$ dans l'intégrale $B_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}}\frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n}\mathrm{d}t$

(b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\frac{\pi}{4n^2} = u_{n-1} - u_n.$$
Donner alors une expression simplifiée, qui ne dépend que de u_N et de constantes, de la somme $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{N^2}$ (pour $N \in \mathbb{N}^*$).

(c) Montrer :
$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \sin(x)$$

(d) Montrer alors que, pour $N \in \mathbb{N}$, on a l'encadrement :
$$0 \leqslant K_N \leqslant \frac{\pi^2}{4} (I_{2N} - I_{2N+2}).$$

(e) En déduire : $u_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$.

(f) En déduire enfin que la suite de terme général $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$ converge, et donner sa limite appelée $\zeta(2)$. On note : $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 1 «$\mathrm{DL}_n(a)$» signifie «développement limité d'ordre n au point a».

1. Donner le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto g(x) = \dfrac{e^x}{1 + \mathrm{ch}(x)}$.
2. Pour tout paramètre k réel, on définit la fonction f_k par :
$$f_k(x) = \sqrt{1+x} + k \, \frac{e^x}{1 + \mathrm{ch}(x)}.$$
Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de f_k.
3. On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de f_k dans un repère orthonormé.
   (a) Donner une équation de T_k, tangente à $\mathcal{C}_k$ au point d'abscisse 0.
   (b) Montrer que, pour k parcourant $\mathbb{R}$, toutes les droites T_k sont concourantes en un point dont on déterminera les coordonnées.
4. Déterminer, en fonction de k, la position relative au voisinage de 0 de $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{T}_k$: illustrer ces différentes situations par un schéma clair.
5. (a) Déterminer les primitives de f_k.
   (b) Existe-t-il $k \in \mathbb{R}$ tel que $\int_0^1 f_k(x)\mathrm{d}x = 0$?

Exercice 2 Soit $f(x) = x \ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right) + \sqrt{1+x^2}$, de courbe représentative $\mathcal{C}$.

1. Donner D_f, le domaine de définition de la fonction f.
2. Calculer les limites de f à tous les bords de D_f.
3. Déterminer toutes les droites asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$. Préciser également leurs positions (locales) relatives avec $\mathcal{C}$: résumer ces résultats sur un schéma clair.